直線 l は，放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$ における接線に直交し，放物線 C にも接する．

(i) 直線 l は，$y = \dfrac{\boxed{13}\boxed{14}}{\boxed{15}}x - \dfrac{\boxed{16}}{\boxed{17}\boxed{18}}$ である．

(ii) 直線 l と放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積は，$\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20}\boxed{21}\boxed{22}}$ である．

(25 青山学院大 経済 1(3))

【答】

1314	15	16	1718	19	202122
-3	2	9	16	9	256

【解答】

$$C : y = x^2$$

(i)
$$y' = 2x$$

C 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$ における接線の方程式は

$$y = 2 \cdot \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}$$

$$\therefore\quad y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$$

である．l はこの直線に直交する直線であるから，実数 k を用いて

$$y = -\frac{3}{2}x + k$$

と表すことができ，さらに l は C に接することより

$$x^2 = -\frac{3}{2}x + k$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - k = 0$$

は重解をもつ．(判別式) $= 0$ より

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4(-k) = 0 \qquad \therefore\quad k = -\frac{9}{16}$$

である．よって，直線 l は

$$l : y = \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}x - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) l と C と x 軸で囲まれた図形は右図の斜線部分である．面積 S は

$$S = \int_{-\frac{3}{4}}^{0} x^2\,dx - \frac{1}{2}\left\{-\frac{3}{8} - \left(-\frac{3}{4}\right)\right\} \cdot \frac{9}{16}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{3}{4}}^{0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{9}{16}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3^3}{4^3} - \frac{3^3}{4^4}$$

$$= \frac{3^2}{4^4}$$

$$= \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{256}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．