関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ と定め，$y=f(x)$ のグラフを曲線 C とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減，極値，グラフの漸近線を調べ，曲線 C の概形をかけ．

(2) 曲線 C 上の点 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$ および直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上の点 B_1，B_2，$\cdots$，B_n，$\cdots$ を次のように定める．$\mathrm{A}_1(1,\ f(1))$ とする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ との交点を B_n，点 B_n から曲線 C に接線を引いて接点を A_{n+1} とする．

(i) $\mathrm{A}_n(a_n,\ f(a_n))$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，a_{n+1} を a_n で表せ．また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(ii) $b_n=(\log_2 a_{2n})\cdot(\log_2 a_{2n+2})$ とするとき．無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ の和を求めよ．

(25 大阪医薬大 後 医 1)

【答】

(1) 略

(2) (i) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$，$a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2}$

【解答】

$$C: y=f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{9}{x}\right)$$

(1) $f(x)$ の定義域は $x \fallingdotseq 0$ である．また，奇関数であり，グラフは原点に関して対称である．$x>0$ における増減を調べる．

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{(x+3)(x-3)}{x^2}$$

であり，$x>0$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

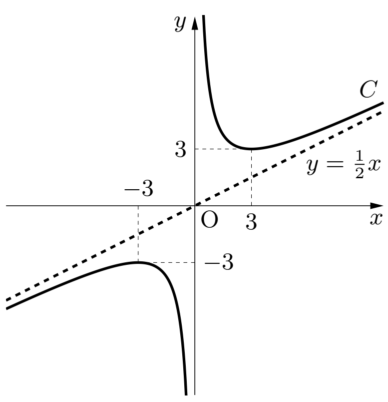
$$f(3)=\frac{1}{2}(3+3)=3,$$
$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

である．原点に関する対称性より，実数全体では $f(x)$ は $x=-3$ で極大値 -3，$x=3$ で極小値 3 をとる．

また，

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{2x}=0$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフの漸近線は $x=0$ と $y=\dfrac{1}{2}x$ であり，曲線 C の概形は右図となる．



(2) (i) $\mathrm{A}_n(a_n,\ f(a_n))$ とするとき，B_n の座標は $\left(a_n,\ \dfrac{1}{2}a_n\right)$ である．$\mathrm{A}_{n+1}(a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$ における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{{a_{n+1}}^2}\right)(x - a_{n+1}) + \frac{1}{2}\left(a_{n+1} + \frac{9}{a_{n+1}}\right)$$

$$\therefore\quad y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{{a_{n+1}}^2}\right)x + \frac{9}{a_{n+1}}$$

である．$\mathrm{A}_{n+1}(a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$ における接線は $\mathrm{B}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{2}a_n\right)$ を通るから

$$\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{{a_{n+1}}^2}\right)a_n + \frac{9}{a_{n+1}}$$

$$0 = -\frac{9}{2{a_{n+1}}^2}a_n + \frac{9}{a_{n+1}}$$

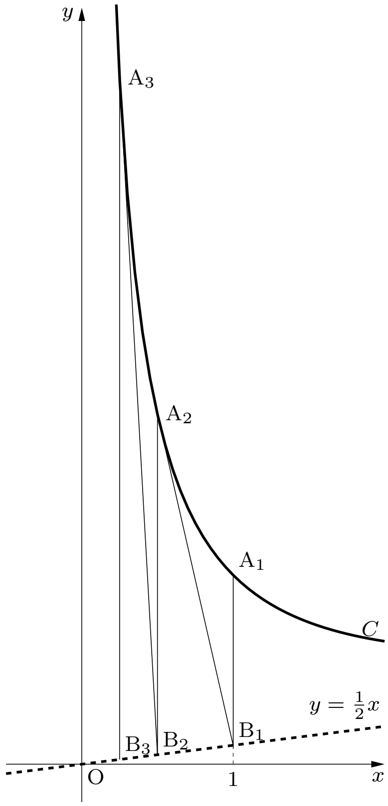
$$0 = -\frac{1}{2a_{n+1}}a_n + 1 \quad (\because\ a_{n+1} \neq 0)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，$a_1 = 1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(ii) (i) より

$$\begin{aligned} b_n &= (\log_2 a_{2n})\cdot(\log_2 a_{2n+2}) \\ &= \left\{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\}\cdot\left\{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right\} \\ &= (-2n+1)(-2n-1) \\ &= (2n-1)(2n+1) \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．