

数列 $\{a_n\}$ が

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k(k+1)} = \frac{\log(1+n)}{1+n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき、以下の問に答えよ。

- (1) a_1 を求めよ。
- (2) a_n を n を用いて表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{a_n}$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{k}$ を求めよ。

(25 青山学院大 理工 B 4)

【答】

- (1) $a_1 = \log 2$
- (2) $a_n = \log \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} \quad (n \geq 1)$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{a_n} = e$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{k} = -\log 2$

【解答】

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k(k+1)} = \frac{\log(1+n)}{1+n} \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

- (1) ①において、 $n=1$ とおくと

$$\frac{a_1}{1 \cdot 2} = \frac{\log 2}{2} \quad \therefore a_1 = \log 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (2) ①において、 n を $n-1$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k(k+1)} = \frac{\log n}{n} \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②の辺々の差をとると

$$\frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{\log(1+n)}{1+n} - \frac{\log n}{n} \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= n \log(1+n) - (n+1) \log n \\ &= \log(1+n)^n - \log n^{n+1} \\ &= \log \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき、 $\log \frac{(1+1)^1}{1^{1+1}} = \log 2$ であり、③は $n=1$ のときも成り立つ。

よって

$$a_n = \log \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

(3) (2) より

$$ne^{a_n} = ne^{\log \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}}} = n \cdot \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} e$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} ne^{a_n} = e \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(4) 部分和 $\sum_{k=2}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{k}$ を整理する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{k} &= \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{a_k}{k} - \frac{(k-1)a_{k-1}}{(k-1)k} \right\} \\ &= \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{a_k}{k} - \frac{a_{k-1}}{k-1} + \frac{a_{k-1}}{(k-1)k} \right\} \\ &= \frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{1} + \sum_{k=2}^n \frac{a_{k-1}}{(k-1)k} \\ &= \frac{a_n}{n} - a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} - \log 2 + \frac{\log n}{n} \quad (\because (2), (1), \textcircled{2}) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \log \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} + \log n \right\} - \log 2 \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{(1+n)^n}{n^n} - \log 2 \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \log 2 \\ &\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} -\log 2 \end{aligned}$$

である. よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{k} = -\log 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.