

次の極限を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{3}{x} - \sin \frac{1}{x} \right)$$

(25 茨城大・工 1(1)(ii))

【答】 2

【解答】

$x \rightarrow \infty$ のとき, 与式は $\infty \cdot (0 - 0) = \infty \cdot 0$ の不定形である.

$t = \frac{1}{x}$ とおくと

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{3}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} (\sin 3t - \sin t) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\sin 3t}{3t} \cdot 3 - \frac{\sin t}{t} \right) \\ &= 1 \cdot 3 - 1 \\ &= \mathbf{2} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{3}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} (\sin 3t - \sin t) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \cdot 2 \cos 2t \sin t \quad (\because \text{和を積に直す公式}) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} 2 \cos 2t \cdot \frac{\sin t}{t} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である.