$a \fallingdotseq 0$ を実数の定数とする．関数 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x+a}}$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ が $\sqrt[3]{4}$ となるような a の値を求めよ．

(25 茨城大 工 1(3))

【答】 $a = \dfrac{1}{12}$

【解答】

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x+a}} \ (a \fallingdotseq 0)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x+a}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1\cdot(x+a) - x\cdot 1}{(x+a)^2} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x+a}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{a}{(x+a)^2} \end{aligned}$$

であるから

$$f'(a) = \sqrt[3]{4}$$

となる a の値は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4a} = \sqrt[3]{4}$$

$$\frac{2^{\frac{2}{3}}}{12a} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{a = \frac{1}{12}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．