関数 $f(x)$ は 3 次導関数 $f'''(x)$ を持ち，$f'(0)=0$ であり，すべての実数 $x$ に対して $f''(x)>0$, $f'''(x)<0$ を満たすものとする．また，$0<a<b$ とし，

$$F=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $F>0$ を示せ．

(2) $F<\dfrac{1}{2}\left\{f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}(b-a)$ を示せ．

(3) $f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)<\dfrac{b-a}{2}f'(b)$ を示せ．

(4) $F<\dfrac{(b-a)^3}{4}f''(a)$ を示せ．

(25 千葉大 9)

---

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) 略

---

【解答】

$$f'(0)=0,\ f''(x)>0,\ f'''(x)<0$$

$$F=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx \quad (0<a<b)$$

(1)
$$g(t)=\frac{f(t)+f(a)}{2}(t-a)-\int_a^t f(x)\,dx \quad (a \leqq t)$$

とおく．$a<t$ において

$$\begin{aligned}
g'(t)&=\frac{f'(t)}{2}(t-a)+\frac{f(t)+f(a)}{2}\cdot 1-f(t)\\
&=\frac{f'(t)}{2}(t-a)-\frac{f(t)-f(a)}{2}\\
g''(t)&=\frac{f''(t)}{2}(t-a)+\frac{f'(t)}{2}\cdot 1-\frac{f'(t)}{2}\\
&=\frac{f''(t)}{2}(t-a)\\
&>0 \quad (\because\ f''(t)>0,\ a<t)
\end{aligned}$$

$g'(t)$ は単調増加である．さらに，$g'(a)=0$ であるから，$a<t$ において $g'(t)>0$ である．

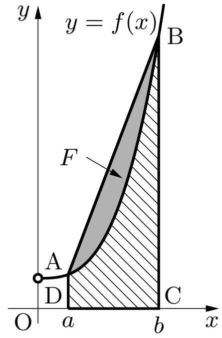
したがって，$g(t)$ は単調増加である．さらに，$g(a)=0$ であるから，$a<t$ において $g(t)>0$ である．

よって，$0<a<b$ のとき $g(b)>0$，すなわち $F>0$ である．　……(証明終わり)

- $x>0$ において，$f''(x)>0$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸である．さらに，$f'(x)$ は単調増加であり，かつ $f'(0)=0$ であるから，$x>0$ においては $f'(x)>0$，すなわち $f(x)$ は単調増加である．よって，$y=f(x)$ $(x>0)$ のグラフは右図となる．$0<a<b$ のとき

$$\begin{aligned}
F&=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx\\
&=(\text{台形 ABCD の面積})-(\text{斜線部分の面積})\\
&>0
\end{aligned}$$

である．



(2) $$h(t) = \frac{1}{2}\left\{f(a) - 2f\left(\frac{a+t}{2}\right) + f(t)\right\}(t-a) - g(t) \quad (a \leqq t)$$

とおくと

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)+f(a)}{2}(t-a) - f\left(\frac{t+a}{2}\right)(t-a) - g(t) \\ &= \int_a^t f(x)\,dx - f\left(\frac{t+a}{2}\right)(t-a) \end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned} h'(t) &= f(t) - f'\left(\frac{t+a}{2}\right)\frac{1}{2}\cdot(t-a) - f\left(\frac{t+a}{2}\right)\cdot 1 \\ &= f(t) - f\left(\frac{t+a}{2}\right) - f'\left(\frac{t+a}{2}\right)\frac{t-a}{2} \end{aligned}$$

である．平均値の定理より

$$\frac{f(t) - f\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}{t - \dfrac{t+a}{2}} = f'(c)$$

$$\therefore \quad f(t) - f\left(\frac{t+a}{2}\right) = f'(c)\frac{t-a}{2}$$

となる $c$ $\left(\dfrac{t+a}{2} < c < t\right)$ が存在するから

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(c)\frac{t-a}{2} - f'\left(\frac{t+a}{2}\right)\frac{t-a}{2} \\ &= \left\{f'(c) - f'\left(\frac{t+a}{2}\right)\right\}\frac{t-a}{2} \\ &> 0 \quad \left(\because\ f''(x) > 0 \text{ より } f'(x) \text{ は単調増加かつ} \frac{t+a}{2} < c,\ a < t\right) \end{aligned}$$

であり，$h(t)$ は単調増加である．さらに，$h(a) = 0$ であるから

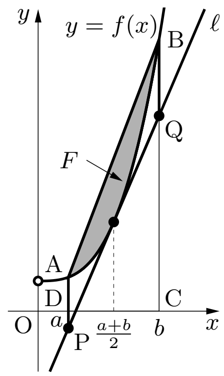
$$h(t) > 0 \ (a < t)$$

が成り立つ．

よって $0 < a < b$ のとき $h(b) > 0$，すなわち

$$F < \frac{1}{2}\left\{f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}(b-a)$$

である． ……(証明終わり)




- $y = f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$ における接線 $\ell$ の方程式は

$$y = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

であり，$\ell$ と直線 AD，BC との交点をそれぞれ P，Q とおくと

$$\begin{aligned} \mathrm{AP} &= f(a) - \left\{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} \\ &= f(a) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \mathrm{BQ} &= f(b) - \left\{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} \\ &= f(b) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

台形 APQB の面積は

$$\frac{1}{2}(\mathrm{AP}+\mathrm{BQ})(b-a) = \frac{1}{2}\left\{f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}(b-a)$$

である．$F$ は台形 APQB に含まれる図形の面積であり

$$F < (\text{台形 APQB の面積})$$

であるから

$$F < \frac{1}{2}\left\{f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}(b-a)$$

である．

(3) 目標の不等式の左辺 $f(a) - 2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)$ は

$$(\text{左辺}) = \left\{f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} + \left\{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$$

と変形される．平均値の定理より

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) = f'(c_1)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) = f'(c_1)\frac{b-a}{2}$$
$$f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'(c_2)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) = f'(c_2)\frac{b-a}{2}$$

となる $c_1$，$c_2$ $\left(a < c_1 < \dfrac{a+b}{2} < c_2 < b\right)$ が存在するから

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= -f'(c_1)\frac{b-a}{2} + f'(c_2)\frac{b-a}{2} \\ &= \{f'(c_2) - f'(c_1)\}\frac{b-a}{2} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．

$f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は単調増加であり，$f'(0) = 0$ かつ $0 < a < c_1$ より $f'(c_1) > 0$ である．$f'(c_2) - f'(c_1) > f'(c_2)$ であるから

$$(\text{左辺}) < f'(c_2)\frac{b-a}{2} < f'(b)\frac{b-a}{2} \quad (\because\ b-a>0,\ c_2<b)$$

すなわち

$$f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) < \frac{b-a}{2}f'(b)$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……(証明終わり)

(4) (2) と ① より

$$\begin{aligned}F &< \frac{1}{2}\cdot\{f'(c_2) - f'(c_1)\}\frac{b-a}{2}\cdot(b-a) \\ &= \frac{(b-a)^2}{4}\{f'(c_2) - f'(c_1)\} \quad (0 < a < c_1 < c_2 < b)\end{aligned}$$

平均値の定理より

$$f'(c_2) - f'(c_1) = f''(d)(c_2 - c_1)$$

となる $d$ $(c_1 < d < c_2)$ が存在する．したがって

$$F < \frac{(b-a)^2}{4}f''(d)(c_2 - c_1)$$

である．$f'''(x) < 0$ より $f''(x)$ は単調減少であるから

$$f''(d) < f''(a) \quad (\because\ a < d)$$

$0 < c_2 - c_1 < b - a$ であるから

$$F < \frac{(b-a)^2}{4}\cdot f''(a)(b-a)$$

すなわち

$$F < \frac{(b-a)^3}{4}f''(a)$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……(証明終わり)