$a>0,\ f(x)=\sqrt{2(x+1)}$ とする．座標平面において，曲線 $C:y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a^2}{2}-1,\ a\right)$ を通る C の法線を ℓ とする．また，点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ は法線 ℓ 上にあり，$\mathrm{PQ}=1$ かつ $t<a$ を満たすとする．以下の各問に答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．また，法線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) s および t を a を用いて表せ．また，極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0} s$ を求めよ．

(3) n を 0 以上の整数とする．$a\to+0$ のとき，

$$\frac{t}{a^n}$$

が収束するような n の値をすべて求めよ．また，そのときの極限値をそれぞれ求めよ．

(25 茨城大 理 2)

【答】

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}$，$\ell:y=-ax+\dfrac{a^3}{2}$

(2) $s=\dfrac{a^2}{2}-1+\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$，　$t=a-\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$，$\displaystyle\lim_{a\to+0}s=0$

(3) $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{t}{a^n}=\begin{cases}0 & (n=0,\ 1,\ 2 \text{ のとき})\\ \dfrac{1}{2} & (n=3 \text{ のとき})\end{cases}$

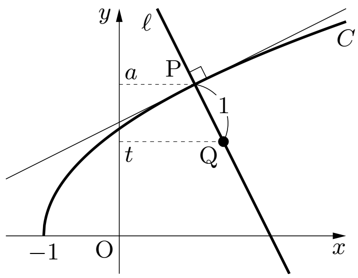
【解答】

$$C:y=f(x)=\sqrt{2(x+1)}$$

(1)
$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2(x+1)}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2x+2}}}$$
……(答)

である．また

$$f'\left(\frac{a^2}{2}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{(a^2-2)+2}}=\frac{1}{|a|}=\frac{1}{a}\quad(\because\ a>0)$$



であるから，$C:y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a^2}{2}-1,\ a\right)$ を通る C の法線 ℓ の方程式は

$$y=-a\left(x-\frac{a^2}{2}+1\right)+a$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\ell:y=-ax+\frac{a^3}{2}}$$
……(答)

である．

(2) $\mathrm{Q}(s,\ t)$ は法線 ℓ 上の点であり，$\mathrm{PQ}=1$ かつ $t<a$ を満たす点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ はベクトル $(1,\ -a)$ と同じ向きをもつ大きさが 1 のベクトルである．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\&=\left(\frac{a^2}{2}-1,\ a\right)+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1,\ -a)\\&=\left(\frac{a^2}{2}-1+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ a-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\end{aligned}$$

であり

$$\boldsymbol{s = \frac{a^2}{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\quad t = a - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また

$$\lim_{a\to+0} s = \lim_{a\to+0}\left(\frac{a^2}{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right) = 0 - 1 + 1 = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) より

$$\begin{aligned}\frac{t}{a^n} &= \frac{1}{a^n}\left(a - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\\ &= \frac{1}{a^{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{\sqrt{1+a^2}}\\ &= \frac{1}{a^{n-1}}\cdot\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}(\sqrt{1+a^2}+1)}\\ &= \frac{1}{a^{n-3}}\cdot\frac{1}{1+a^2+\sqrt{1+a^2}}\end{aligned}$$

である．

$$\lim_{a\to+0}\frac{1}{1+a^2+\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{2}$$

であるから，$a \longrightarrow +0$ のとき，$\dfrac{t}{a^n}$ が収束する条件は $\dfrac{1}{a^{n-3}} = a^{3-n}$ が収束することである．n は 0 以上の整数であるから

$$3 - n \geqq 0,\quad \boldsymbol{n = 0,\ 1,\ 2,\ 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．極限値は

$$\begin{aligned}\frac{t}{a^n} &= \lim_{a\to+0}\left(\frac{1}{a^{n-3}}\cdot\frac{1}{1+a^2+\sqrt{1+a^2}}\right)\\ &= \begin{cases}0\cdot\dfrac{1}{2} & (n=0,\ 1,\ 2\ \text{のとき})\\ 1\cdot\dfrac{1}{2} & (n=3\ \text{のとき})\end{cases}\\ &= \begin{cases}\mathbf{0} & \boldsymbol{(n=0,\ 1,\ 2\ \textbf{のとき})}\\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}} & \boldsymbol{(n=3\ \textbf{のとき})}\end{cases}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．