以下の問いに答えなさい．解答欄には計算過程も書きなさい．

(1) 実数 $x,\ y$ の間に $y=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ の関係があるとき，$x,\ y$ の取りうる範囲をそれぞれ求めなさい．

(2) (1) で求めた範囲で関数 $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ を定義するとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求めなさい．

(3) $y=f(x)$ のグラフを xy 平面上にかきなさい．極値および変曲点が存在するときは，その座標をグラフ中に明記しなさい．

(25 公立千歳科技大 中期 理工 4)

【答】

(1) $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$

(2) $f^{-1}(x)=2x^2-x^4\ (0 \leqq x \leqq 1)$

(3) 略

【解答】

(1)
$$y=\sqrt{1-\sqrt{1-x}} \qquad \cdots\cdots ①$$

y を x の関数とみると，① の定義域は

$$\begin{cases} 1-x \geqq 0 \\ 1-\sqrt{1-x} \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x \geqq 0 \\ 1^2 \geqq 1-x \end{cases} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{0 \leqq x \leqq 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

y の値域は ① を満たす x が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に存在するような y の集合である．① を同値変形すると

$$① \iff \begin{cases} y^2=1-\sqrt{1-x} \\ y \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{1-x}=1-y^2 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1-x=(1-y^2)^2 \\ 1-y^2 \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x=(1-y^2)^2 & \cdots\cdots ② \\ 0 \leqq y \leqq 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$0 \leqq x \leqq 1 \iff 0 \leqq 1-x \leqq 1$ であるから，② を満たす x が存在する y の条件は

$$0 \leqq (1-y^2)^2 \leqq 1 \iff -1 \leqq 1-y^2 \leqq 1 \iff 0 \leqq y^2 \leqq 2$$

$$\therefore\quad -\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$$

であり，③ とあわせると y の取りうる範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq y \leqq 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- x が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で動くときの y の変化の様子を調べると，$1-x$ は単調減少であるから，$1-\sqrt{1-x}$ は単調増加であり，$y=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ は単調増加であることがわかる．よって，y の取りうる範囲は

$$\sqrt{1-\sqrt{1-0}} \leqq y \leqq \sqrt{1-\sqrt{1-1}}$$

$$\therefore\quad 0 \leqq y \leqq 1$$

である．

(2) ① を x について解くと，② より

$$x = 1 - (1 - y^2)^2 = 2y^2 - y^4$$

である．また，$y = f(x)$ の値域は $0 \leqq y \leqq 1$ であるから，$y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = 2x^2 - x^4 \ (0 \leqq x \leqq 1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $y = f(x)$ のグラフは $y = f^{-1}(x)$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である．

まず，$g(x) = f^{-1}(x) = 2x^2 - x^4$ とおき，$y = g(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のグラフを考える．

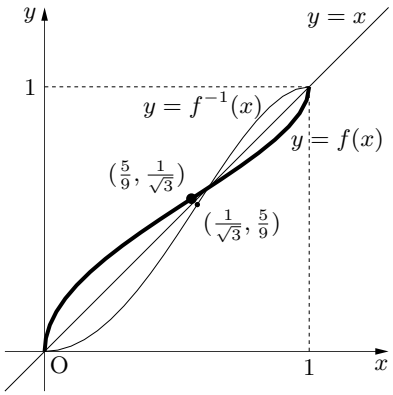
$$g'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 + x)(1 - x) > 0 \ (0 < x < 1)$$

$$g''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1 + \sqrt{3}x)(1 - \sqrt{3}x)$$

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の増減と凹凸は下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(x)$	(0)	$+$	$+$	$+$	(0)
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	⤴		↱	1

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$y = g(x)$ は単調増加で変曲点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{5}{9}\right)$ をもち，グラフは右図の細線部分である．

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称であるから，$y = f(x)$ は単調増加で変曲点 $\left(\frac{5}{9},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をもち，グラフは右図の太線部分である．