

関数 $f(x) = x + 1$ と $g(x) = x^2 + bx + c$ を考える. ただし, b, c は定数とする. 以下の問いに答えなさい.

- (a) 関数 $h(x) = f(x)g(x)$ が $x = -1$ で極大値, $x = 1$ で極小値をとるとき, $b = -\boxed{\text{ア}}$, $c = -\boxed{\text{イ}}$ である.
- (b) 関数 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ が $x = 0$ で極小値 1 をとるとき, $b = \boxed{\text{ウ}}$, $c = \boxed{\text{エ}}$ である.
- (c) 関数 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ の値域が $-1 \leq h(x) \leq 1$ であるとき, $b = \boxed{\text{オ}}$, $c = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である.

(25 東京理科大 工学部 1(3))

【答】	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	1	2	1	1	2	5	4

【解答】

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = x^2 + bx + c \quad (b, c \text{ は定数})$$

- (a) $h(x) = f(x)g(x) = (x + 1)(x^2 + bx + c)$ を微分すると

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \cdot (x^2 + bx + c) + (x + 1)(2x + b) \\ &= 3x^2 + (2b + 2)x + b + c \quad \cdots \cdots \text{①} \end{aligned}$$

であり, 関数 $h(x) = f(x)g(x)$ が $x = -1$, $x = 1$ で極値をとるから

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3(x + 1)(x - 1) \\ &= 3x^2 - 3 \quad \cdots \cdots \text{②} \end{aligned}$$

であることが必要であり, $h'(x)$ の符号は $x = -1$ で正から負, $x = 1$ で負から正に変わるから, $h(x)$ は $x = -1$ で極大値, $x = 1$ で極小値をとるから十分でもある.

①, ② を比較して

$$\begin{cases} 2b + 2 = 0 \\ b + c = -3 \end{cases} \quad \therefore b = -1, \quad c = -2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

- (b) $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + bx + c}{x + 1}$ を微分すると

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x + b)(x + 1) - (x^2 + bx + c) \cdot 1}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + b - c}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

である. $h(x)$ は $x = 0$ で極小値 1 をとるから

$$\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} c = 1 \\ b - c = 0 \end{cases} \quad \therefore b = c = 1$$

であることが必要である。このとき

$$h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}, \quad h'(x) = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$$

であり、 $h(x)$ の増減は下表となる。

x	...	-2	...	-1	...	0	...
$h'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$h(x)$	↗	-3	↘	/	↘	1	↗

$h(x)$ は $x = 0$ で極小値 1 をとるから十分である。

よって、

$$b = 1 \quad c = 1$$

……(答)

である。

(c) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 1}{x^2 + bx + c}$ の分母に着目する。

$x^2 + bx + c = 0$ が実数解 α, β をもつと仮定すると

(i) α, β の少なくとも一方が -1 のとき、 $x + 1$ が約分され $h(x) = \frac{1}{x - \alpha}$ となる。

$$\lim_{x \rightarrow \pm\alpha} h(x) = \pm\infty$$

であり、 $h(x)$ の値域が $-1 \leq h(x) \leq 1$ であることに反する..

(ii) $\alpha \neq -1, \beta \neq -1$ のとき、 $h(x) = \frac{x + 1}{(x - \alpha)(x - \beta)}$ であり

$$\lim_{x \rightarrow \pm\alpha} |h(x)| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\beta} |h(x)| = \infty$$

であり、 $h(x)$ の値域が $-1 \leq h(x) \leq 1$ であることに反する。

したがって、 $x^2 + bx + c = 0$ は実数解をもたない。このとき、すべて実数 x に対して、 $g(x) > 0$ であるから、 $-1 \leq h(x) \leq 1$ は

$$\begin{aligned} -(x^2 + bx + c) &\leq x + 1 \leq x^2 + bx + c \\ \begin{cases} x^2 + (b + 1)x + c + 1 \geq 0 \\ x^2 + (b - 1)x + c - 1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

と言いかえることができる。

2 式はすべて実数 x に対して成り立ち、かつ等号も成立するから、 b, c は

$$\begin{cases} (b + 1)^2 - 4(c + 1) = 0 \\ (b - 1)^2 - 4(c - 1) = 0 \end{cases}$$

を満たす。よって

$$\begin{cases} 4c = (b + 1)^2 - 4 \\ (b - 1)^2 - (b + 1)^2 + 8 = 0 \\ 4c = (b + 1)^2 - 4 \\ -4b + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore b = 2, \quad c = \frac{5}{4}$$

……(答)

である。