$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ とする．原点を O とする座標平面上の曲線 $y=f(x)$ $(x>0)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とし，ℓ と x 軸の交点を P，ℓ と y 軸の交点を Q とする．また，三角形 OPQ の面積を S とする．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．
(2) S を t を用いて表せ．
(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，S の最小値を求めよ．

(25 徳島大 理工・医 (保) 4)

【答】

(1) $\ell : y=-\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}x+\dfrac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$

(2) $S=\dfrac{(3t^2+1)^2}{4t(t^2+1)^2}$

(3) $\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

【解答】

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

(1) 微分すると

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

であり，曲線 $y=f(x)$ $(x>0)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y&=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}(x-t)+\frac{1}{t^2+1}\\ &=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}x+\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}+\frac{1}{t^2+1} \end{aligned}$$

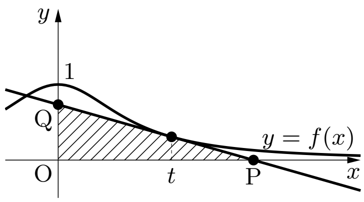
$$\therefore\quad \ell : \boldsymbol{y=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}x+\frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) P は ℓ と x 軸の交点，Q は ℓ と y 軸の交点であり，P，Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{3t^2+1}{2t},\ 0\right),\quad \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}\right)$$

である．



三角形 OPQ は右図の斜線部分であり，面積 S は

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3t^2+1}{2t}\cdot\frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}\quad(\because\ t>0)\\ &=\boldsymbol{\frac{(3t^2+1)^2}{4t(t^2+1)^2}} \quad\cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(3) $S>0$ であるから，① の対数をとると

$$\log S = 2\log(3t^2+1) - \log 4 - \log t - 2\log(t^2+1) \quad (\because\ 0<t<1)$$

微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{S'}{S} &= 2\cdot\frac{6t}{3t^2+1} - \frac{1}{t} - 2\cdot\frac{2t}{t^2+1}\\
&= \frac{12t^2(t^2+1)-(3t^2+1)(t^2+1)-4t^2(3t^2+1)}{t(3t^2+1)(t^2+1)}\\
&= \frac{-3t^4+4t^2-1}{t(3t^2+1)(t^2+1)}\\
&= -\frac{(3t^2-1)(t^2-1)}{t(3t^2+1)(t^2+1)}\\
\therefore\quad S' &= -\frac{(3t^2+1)^2}{4t(t^2+1)^2}\cdot\frac{(3t^2-1)(t^2-1)}{t(3t^2+1)(t^2+1)}\\
&= -\frac{(3t^2+1)(3t^2-1)(t^2-1)}{4t^2(t^2+1)^3}
\end{aligned}$$

となる．$0<t<1$ における S の増減は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

であり，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき S は極小かつ最小となる．S の最小値は

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(3\cdot\frac{1}{3}+1\right)^2}{4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}+1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{16}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．