$x>0,\ y>0,\ x+7y=1$ のとき，$\dfrac{1}{7x}+\dfrac{1}{y}$ の最小値を求めよ．また，そのときの $x,\ y$ の値をそれぞれ求めよ．

(25 茨城大 工 3(3))

【答】 最小値 $\dfrac{64}{7}$ $\left(x=y=\dfrac{1}{8}\right)$

【解答】

与えられた条件を変形すると

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+7y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ y=\dfrac{1-x}{7} \\ \dfrac{1-x}{7}>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0<x<1 \\ y=\dfrac{1-x}{7} \end{cases}$$

となる．

$$\frac{1}{7x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7x}+\frac{1}{\dfrac{1-x}{7}}=\frac{1}{7x}+\frac{7}{1-x}$$

$f(x)=\dfrac{1}{7x}+\dfrac{7}{1-x}$ $(0<x<1)$ とおく．

$$\begin{aligned} f'(x)&=-\frac{1}{7x^2}+\frac{7}{(1-x)^2}=\frac{-(1-x)^2+49x^2}{7x^2(1-x)^2}=\frac{(7x+1-x)(7x-1+x)}{7x^2(1-x)^2} \\ &=\frac{(6x+1)(8x-1)}{7x^2(1-x)^2} \end{aligned}$$

$0<x<1$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{8}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$f(x)$ は

$$x=\frac{1}{8}\text{のとき最小値 } f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{7\cdot\dfrac{1}{8}}+\frac{7}{1-\dfrac{1}{8}}=\frac{8}{7}+8=\frac{64}{7}$$

をとる．このとき

$$y=\frac{1-\dfrac{1}{8}}{7}=\frac{1}{8}$$

である．

以上より，$\dfrac{1}{7x}+\dfrac{1}{y}$ は

$\boldsymbol{x=y=\dfrac{1}{8}}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{\dfrac{64}{7}}$ ……(答)

をとる．

- 相加平均・相乗平均の関係を用いる解法もある．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7x}+\frac{1}{y} &= (x+7y)\left(\frac{1}{7x}+\frac{1}{y}\right) \quad (\because\ x+7y=1)\\
&= \frac{1}{7}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+7\\
&= \frac{50}{7}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\\
&\geqq \frac{50}{7}+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} \quad (\because\ x>0,\ y>0, \text{相加平均・相乗平均の関係})\\
&= \frac{64}{7}
\end{aligned}$$

等号は

$$\begin{cases} x>0 \text{ かつ } y>0 \text{ かつ } x+7y=1 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \therefore\quad x=y=\frac{1}{8}$$

のとき成り立つ．

よって，$\dfrac{1}{7x}+\dfrac{1}{y}$ は

$x=y=\dfrac{1}{8}$ のとき，最小値 $\dfrac{64}{7}$ ……（答）

をとる．