

次の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \cos \left(\frac{k^2 \pi}{2n^2} \right)$$

(25 大阪医薬大 医 1(1))

【答】 $\frac{1}{\pi}$

【解答】

区分求積法を用いる.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \cos \left(\frac{k^2 \pi}{2n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k^2}{n^2} \right) \\ &= \int_0^1 x \cos \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi x^2}{2} \right)' \cos \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.