$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 2k \sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．p を 2 以上の整数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p}$$

を求めよ．(25 大阪医薬大 医 1(2))

【答】 $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi} & (p = 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (p > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$

【解答】

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 2k \sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

区分求積法を用いる．

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n^p} \cdot \sum_{k=1}^{n} 2k \sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right) \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{2}{n^{p-2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \sin\left(2\pi \cdot \frac{k}{n}\right) \right\} \end{aligned}$$

$p = 2$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} &= 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \sin\left(2\pi \cdot \frac{k}{n}\right) \\ &= 2\int_0^1 x \sin 2\pi x \, dx \\ &= 2\left\{ \left[x \cdot \frac{(-\cos 2\pi x)}{2\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{(-\cos 2\pi x)}{2\pi} \, dx \right\} \\ &= 2\left\{ -\frac{1}{2\pi} + \left[\frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2} \right]_0^1 \right\} \\ &= 2\left(-\frac{1}{2\pi} + 0 \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

p が 2 より大きい整数のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-2}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \sin\left(2\pi \cdot \frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) = 0$$

である．以上より

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi} & (p = 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (p > 2 \text{ のとき}) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．