a を実数の定数とする．O を原点とする座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が t の関数として

$$x = e^{at}\cos t, \quad y = e^{at}\sin t$$

で表されるとき，時刻 t における点 P の速度を $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ．

(2) 時刻 t における点 P の速さ $|\overrightarrow{v}|$ を求めよ．

(3) $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおく．時刻 t において，$\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{v}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする．$\cos\theta$ を a を用いて表し，θ は t によらない定数であることを示せ．

(4) (3) で定めた角 θ の値が $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であるとき，定数 a を求めよ．

(25 鳥取大 医 2，医 (生・保)・工・農 (獣) 3)

【答】

(1) $\dfrac{dx}{dt} = e^{at}(a\cos t - \sin t)$，$\dfrac{dy}{dt} = e^{at}(a\sin t + \cos t)$

(2) $|\overrightarrow{v}| = e^{at}\sqrt{a^2+1}$

(3) $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，証明は略.

(4) $a = \sqrt{3}$

【解答】

$$x = e^{at}\cos t, \quad y = e^{at}\sin t$$

(1) t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = ae^{at}\cos t - e^{at}\sin t = \boldsymbol{e^{at}(a\cos t - \sin t)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\frac{dy}{dt} = ae^{at}\sin t + e^{at}\cos t = \boldsymbol{e^{at}(a\sin t + \cos t)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) P の速さ $|\overrightarrow{v}|$ は

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{v}| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{e^{2at}(a\cos t - \sin t)^2 + e^{2at}(a\sin t + \cos t)^2} \\ &= \boldsymbol{e^{at}\sqrt{a^2+1}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(3)
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{p}||\overrightarrow{v}|}$$

である．

$$|\overrightarrow{p}| = e^{at}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = e^{at}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{v} &= \left(e^{at}\cos t,\ e^{at}\sin t\right)\cdot\left(e^{at}(a\cos t - \sin t),\ e^{at}(a\sin t + \cos t)\right) \\ &= e^{2at}\{\cos t(a\cos t - \sin t) + \sin t(a\sin t + \cos t)\} \\ &= ae^{2at}\end{aligned}$$

であり

$$\cos\theta = \frac{ae^{2at}}{e^{at}\times e^{at}\sqrt{a^2+1}} = \boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad\qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

　a は実数の定数であり，$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ は $-1 < \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} < 1$ を満たす定数であるから，① を満たす θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ は存在し，この θ は t によらない定数である．　…… (証明終わり)

(4)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であるとき

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \qquad \therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \qquad \cdots\cdots (*)$$

$(*)$ を変形すると

$$(*) \iff \sqrt{3}\sqrt{a^2+1} = 2a \iff \begin{cases} 3(a^2+1) = 4a^2 \\ a > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 3 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a = \sqrt{3}} \qquad\qquad \cdots\cdots(答)$$

である．