e を自然対数の底とする．すべての自然数 n に対して，

$$a_n = n!e - \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$$

が整数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(25 会津大 6)

【答】 略

【解答】

$$a_n = n!e - \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

すべての自然数 n に対して，a_n が整数であることを数学的帰納法を用いて証明する．

(i) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
a_1 &= e - \int_0^1 xe^{1-x}\,dx = e - e\int_0^1 xe^{-x}\,dx \\
&= e - e\left\{\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 1\cdot e^{-x}\,dx\right\} \\
&= e - e\left\{-e^{-1} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^1\right\} \\
&= e - e\{-e^{-1} + (-e^{-1}+1)\} \\
&= 2
\end{aligned}$$

であり，$n = 1$ のとき，a_1 は整数である．

(ii) $n = k$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= (k+1)!e - \int_0^1 x^{k+1}e^{1-x}\,dx \\
&= (k+1)!e - e\int_0^1 x^{k+1}e^{-x}\,dx \\
&= (k+1)!e - e\left\{\Big[-x^{k+1}e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 (k+1)x^k\cdot e^{-x}\,dx\right\} \\
&= (k+1)!e + 1 - (k+1)\int_0^1 x^k\cdot e^{1-x}\,dx \\
&= (k+1)!e + 1 - (k+1)(k!e - a_k) \quad (\because \text{①}) \\
&= 1 + (k+1)a_k
\end{aligned}$$

帰納法の仮定より，$n = k+1$ のときも a_{k+1} は整数である．

以上 (i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，a_n は整数である．　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)