

$\int_1^{e^2} \sqrt{x} \log \sqrt{x} dx$ を求めると □ である.

(25 会津大 1(2))

【答】

□
$\frac{4}{9}e^3 + \frac{2}{9}$

【解答】

部分積分法を用いる.

$$\begin{aligned}
 \int_1^{e^2} \sqrt{x} \log \sqrt{x} dx &= \int_1^{e^2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} \log x dx \\
 &= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \cdot \log x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{2}{3} e^3 - \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_1^{e^2} \\
 &= \frac{2}{3} e^3 - \left(\frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{9} \right) \\
 &= \frac{4}{9} e^3 + \frac{2}{9} \qquad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

である.

• $t = \sqrt{x}$ とおくと

$$t^2 = x \quad \therefore \quad 2t dt = dx \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \longrightarrow e^2 \\ t & 1 \longrightarrow e \end{array}$$

であり

$$\begin{aligned}
 \int_1^{e^2} \sqrt{x} \log \sqrt{x} dx &= \int_1^e t \log t \cdot 2t dt = 2 \int_1^e t^2 \log t dt \\
 &= 2 \left[\frac{t^3}{3} \cdot \log t \right]_1^e - 2 \int_1^e \frac{t^3}{3} \cdot \frac{1}{t} dt \\
 &= \frac{2}{3} e^3 - \frac{2}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^e \\
 &= \frac{2}{3} e^3 - \frac{2}{3} \frac{e^3 - 1}{3} \\
 &= \frac{4}{9} e^3 + \frac{2}{9}
 \end{aligned}$$

である.