次の定積分を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \boxed{（う）}$$

(25 茨城大 後 工 1(2)(ii))

【答】

（う）
$\dfrac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$

【解答】

$I=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$，$J=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ とおき，それぞれに部分積分法を用いると

$$I=\Big[(-e^{-x})\cdot\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})\cdot\cos x\,dx=J \qquad \cdots\cdots ①$$

$$J=\Big[(-e^{-x})\cdot\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})\cdot(-\sin x)\,dx=e^{-\pi}+1-I$$

$$\therefore\quad I+J=e^{-\pi}+1$$

①より

$$2I=e^{-\pi}+1 \qquad \therefore\quad I=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $e^{-x}\sin x$，$e^{-x}\cos x$ をそれぞれ x で微分して，原始関数を求める．

$$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x \qquad \cdots\cdots ㋐$$

$$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x \qquad \cdots\cdots ㋑$$

㋐, ㋑ の辺々を加えると

$$(e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)'=-2e^{-x}\sin x$$

$$\therefore\quad \int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C \quad （C\ は積分定数）$$

である．よって

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\cos x+\sin x)\Big]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}(-e^{-\pi}-1)$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$$

である．

- もちろん，部分積分を 2 回行ってもよい．

$$I=\Big[(-e^{-x})\cdot\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})\cdot\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=\Big[(-e^{-x})\cdot\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})\cdot(-\sin x)\,dx$$

$$=e^{-\pi}+1-I$$

であるから

$$2I=e^{-\pi}+1 \qquad \therefore\quad I=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$$

である．