正の整数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_1^e (\log x)^n\,dx$ とおく．

(1) I_{n+1} を n と I_n を用いて表せ．

(2) すべての正の整数 n について，I_n が次の形で表されることを数学的帰納法を用いて示せ．

$$I_n = (-1)^{n+1}n! + a_n e \quad (\text{ただし，}a_n\text{は整数})$$

(3) (2) で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} + \frac{a_n}{n!}$$

で定める．すべての正の整数 n について，不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k < 1$ が成り立つことを示せ．

(25 富山大 後 理・都市 2)

【答】

(1) $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

(2) 略

(3) 略

【解答】

$$I_n = \int_1^e (\log x)^n\,dx \ (n \text{ は正の整数})$$

(1) 部分積分法を用いる．

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^{n+1}\,dx \\ &= \Big[x\cdot(\log x)^{n+1}\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= e - (n+1)\int_1^e (\log x)^n\,dx \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

よって，求める式は

$$\boldsymbol{I_{n+1} = e - (n+1)I_n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) すべての正の整数 n について

$$I_n = (-1)^{n+1}n! + a_n e \quad (\text{ただし，}a_n\text{は整数}) \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

と表されることを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \log x\,dx = \Big[x\cdot\log x\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= e - \Big[x\Big]_1^e = e - (e-1) = 1 \end{aligned}$$

$(*)$ の右辺は

$$(-1)^2 1! + a_1 e = 1 + a_1 e$$

であり，$a_1 = 0$ とおくと，$(-1)^2 1! + a_1 e = 1$ となり，$n = 1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= e-(k+1)I_k \quad (\because\ (1)) \\ &= e-(k+1)\{(-1)^{k+1}k!+a_k e\} \quad (\because\ \text{帰納法の仮定}) \\ &= (-1)^{k+2}(k+1)!+\{1-(k+1)a_k\}e \end{aligned}$$

であり，$a_{k+1}=1-(k+1)a_k$ とおくと，$I_{k+1}=(-1)^{k+2}(k+1)!+a_{k+1}e$ となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての正の整数 n について

$$(**)\begin{cases} a_1=0 \\ a_{n+1}=1-(n+1)a_n \end{cases}$$

とおくと，$(*)$ が成り立つことが示された． ……(証明終わり)

(3) (2) で定まる数列 $\{a_n\}$ に対し $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{a_n}{n!}$ であるから

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1-(n+1)a_n}{(n+1)!}+\frac{a_n}{n!} \quad (\because\ (**)) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

である．したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k\cdot(k+1)} \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2\cdot 2}_{k\ \text{個}}} \quad (\text{等号は } n=1 \text{ のときのみ成り立つ}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n} \\ &< 1 \quad \left(\because\ \frac{1}{2^n}>0\right) \end{aligned}$$

であり，すべての正の整数 n について，不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k<1$ が成り立つ． ……(証明終わり)