連続関数 $f(x)$ が $f(1)=5$ を満たすとき，以下の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x t^2 f(t)\,dt$$

(25 茨城大 工 4(3))

【答】 $\dfrac{5}{2}$

【解答】

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x t^2 f(t)\,dt$$

$F(x)=\displaystyle\int_1^x t^2 f(t)\,dt$ とおく．

$$F'(x)=x^2 f(x),\quad F(1)=0$$

であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x t^2 f(t)\,dt &= \lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{(x+1)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\,\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\\ &= \frac{1}{2}F'(1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 f(1)\\ &= \boldsymbol{\frac{5}{2}}\quad (\because\ f(1)=5)\end{aligned}$$ ……（答）

である．