関数 $f(x)=\dfrac{2}{4-x^2}$ の定義域を $-2<x<2$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ の接線で，原点を通る 2 直線の方程式を求めよ．
(2) 関数 $f(x)$ の不定積分を求めよ．
(3) 曲線 $y=f(x)$ と (1) で求めた 2 接線によって囲まれる図形の面積を求めよ．

(25 公立小松大 3)

【答】

(1) $y=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x$

(2) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2+x}{2-x}+C$ (C は積分定数)

(3) $\log(2+\sqrt{3})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】

$$f(x)=\frac{2}{4-x^2}\ (-2<x<2)$$

(1) 微分すると

$$f'(x)=\frac{-2(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{4x}{(4-x^2)^2}$$

であり，$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}
y&=\frac{4t}{(4-t^2)^2}(x-t)+\frac{2}{4-t^2}\\
&=\frac{4t}{(4-t^2)^2}x+\frac{-4t^2+2(4-t^2)}{(4-t^2)^2}\\
\therefore\quad y&=\frac{4t}{(4-t^2)^2}x+\frac{2(4-3t^2)}{(4-t^2)^2}
\end{aligned}$$

である．これが原点をとるときの t の値は

$$0=\frac{2(4-3t^2)}{(4-t^2)^2}\qquad\therefore\quad t^2=\frac{4}{3}\qquad\therefore\quad t=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

である．

よって，原点を通る 2 本の接線の方程式は

$$y=\pm\frac{4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(4-\frac{4}{3}\right)^2}x\qquad\therefore\quad \boldsymbol{y=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}x}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $f(x)$ の不定積分は

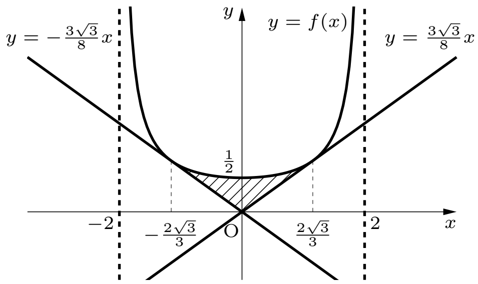
$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx&=\int\frac{2}{(2+x)(2-x)}\,dx\\
&=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)dx\\
&=\frac{1}{2}(\log|2+x|-\log|2-x|)+C\ (C\text{ は積分定数})\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{2+x}{2-x}+C}\quad(\because\ -2<x<2)\qquad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) $f(x)$ は偶関数であるから，$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．
$0 \leqq x < 2$ のおける $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	(2)
$f'(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = +\infty$$



であり，$y=f(x)$ $(-2<x<2)$ のグラフは
右図となる．$y=f(x)$ と (1) で求めた 2 接線によって囲まれる図形は右図の斜線部分であり，この面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \left\{ f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{8}x \right\} dx \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\log\frac{2+x}{2-x} - \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2 \right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \qquad (\because\ (2)) \\
&= \log\frac{2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\
&= \log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \log\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \boldsymbol{\log(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．