座標平面上に曲線 $C : y = \sqrt{x^2 - 4}\ (x \geqq 2)$ がある．点 $(1,\ 0)$ を通る C の接線を l とし，次の問いに答えよ．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．また，l と曲線 C の接点の座標を求めよ．

(2) t を 0 以上の実数とする．曲線 C と直線 $x = e^t + e^{-t}$ の共有点の y 座標を t を用いて表せ．

(3) 直線 l，曲線 C および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(25 大阪医薬大 後 医 3)

【答】

(1) $l : 2x - \sqrt{3}y = 2$，接点の座標は $\left(4,\ 2\sqrt{3}\right)$

(2) $e^t - e^{-t}$

(3) $2\log(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}$

【解答】

$$C : y = \sqrt{x^2-4}\ (x \geqq 2) \iff x^2 - y^2 = 4\ (x \geqq 2,\ y \geqq 0)$$

(1) C 上の点 $(u,\ v)\ (u \geqq 2,\ v \geqq 0)$ における接線の方程式は

$$ux - vy = 4$$

であり，これが点 $(1,\ 0)$ を通るとき

$$u \cdot 1 - v \cdot 0 = 4 \qquad \therefore\quad u = 4,\ v = \sqrt{4^2-4} = 2\sqrt{3}$$

である．よって，点 $(1,\ 0)$ を通る C の接線 l の方程式は

$$4x - 2\sqrt{3}y = 4 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{l : 2x - \sqrt{3}y = 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，接点の座標は

$$\boldsymbol{\left(4,\ 2\sqrt{3}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

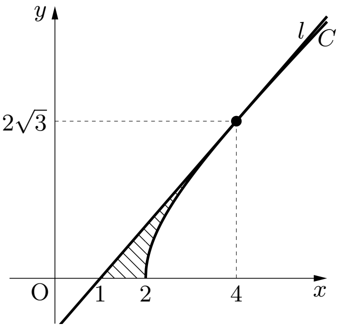
である．

(2) 曲線 C と直線 $x = e^t + e^{-t}\ (t \geqq 0)$ の共有点の y 座標は

$$y = \sqrt{(e^t+e^{-t})^2 - 4} = \sqrt{(e^t - e^{-t})^2} = \boldsymbol{e^t - e^{-t}} \quad (\because\ t \geqq 0) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 直線 l，曲線 C および x 軸によって囲まれる部分は右図の斜線部分であり，その面積 S は



$$S = \frac{1}{2}(4-1)\cdot 2\sqrt{3} - \int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx$$
$$= 3\sqrt{3} - \int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx$$

である．C 上の点 $\left(x,\ \sqrt{x^2-4}\right)$ について

$$x = e^t + e^{-t}$$

とおくと，(2) より

$$y = e^t - e^{-t}$$

となる．辺々加えると

$$x + y = 2e^t \qquad \therefore\quad t = \log\frac{x+y}{2}$$

であり

$$dx = (e^t - e^{-t})\,dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 2 & \longrightarrow & 4 \\ \hline t & 0 & \longrightarrow & \log(2+\sqrt{3}) \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx &= \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} (e^t - e^{-t}) \cdot (e^t - e^{-t})\,dt \\
&= \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} (e^{2t} + e^{-2t} - 2)\,dt \\
&= \left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t \right]_0^{\log(2+\sqrt{3})} \\
&= \frac{e^{2\log(2+\sqrt{3})}}{2} - \frac{e^{-2\log(2+\sqrt{3})}}{2} - 2\log(2+\sqrt{3}) \\
&= \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2} - \frac{(2+\sqrt{3})^{-2}}{2} - 2\log(2+\sqrt{3}) \\
&= \frac{7+4\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2(7+4\sqrt{3})} - 2\log(2+\sqrt{3}) \\
&= \frac{7+4\sqrt{3}}{2} - \frac{7-4\sqrt{3}}{2} - 2\log(2+\sqrt{3}) \\
&= 4\sqrt{3} - 2\log(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

である．

よって

$$\begin{aligned}
S &= 3\sqrt{3} - \{4\sqrt{3} - 2\log(2+\sqrt{3})\} \\
&= \mathbf{2\log(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．