e を自然対数の底とする．$x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=e^{-x}|\sin x|$ を考え，曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標を，小さい順に t_0，t_1，t_2，$\cdots$ とする．ただし，$t_0=0$ である．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$t_{n-1} \leqq x \leqq t_n$ において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(\pi)$，$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$ および $\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$ を求めよ．また，関数 $f(x)$ が $x=\pi$ で微分可能かどうかを判定せよ．

(3) $g(x)=e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$ とするとき，$g'(x)=e^{-x}\sin x$ が成り立つように定数 a，b の値を定めよ．

(4) S_1 を求めよ．

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ．

(25 宇都宮大 データ経営 (理)・地域デ・工・農 3)

【答】

(1) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}$，$f(\pi)=0$，$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=e^{-\frac{3\pi}{2}}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=e^{-\pi}$，$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=-e^{-\pi}$，$f(x)$ は $x=\pi$ で微分可能でない．

(3) $a=b=-\dfrac{1}{2}$

(4) $S_1=\dfrac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n=$

【解答】

$$f(x)=e^{-x}|\sin x| \quad (x \geqq 0)$$

(1) 順に計算すると

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}|1|=\boldsymbol{e^{-\frac{\pi}{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$f(\pi)=e^{-\pi}|\sin\pi|=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e^{-\frac{3\pi}{2}}|-1|=\boldsymbol{e^{-\frac{3\pi}{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)
$$\begin{aligned}
f(\pi+h)&=e^{-(\pi+h)}|\sin(\pi+h)|\\
&=e^{-(\pi+h)}|-\sin h|\\
&=\begin{cases} e^{-(\pi+h)}\sin h & \left(0<h<\dfrac{\pi}{2}\text{ のとき}\right)\\[2ex] -e^{-(\pi+h)}\sin h & \left(-\dfrac{\pi}{2}<h<0\text{ のとき}\right)\end{cases}
\end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{e^{-(\pi+h)}\sin h-0}{h}=e^{-\pi}\cdot 1=\boldsymbol{e^{-\pi}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{-e^{-(\pi+h)}\sin h-0}{h}=-e^{-\pi}\cdot 1=\boldsymbol{-e^{-\pi}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}\neq\lim_{h\to-0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$ であり，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$ は存在しないから，$f(x)$ は $x=\pi$ で**微分可能でない．** ……(答)

(3) $$g(x)=e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$$

微分すると

$$\begin{aligned}g'(x)&=-e^{-x}(a\sin x+b\cos x)+e^{-x}(a\cos x-b\sin x)\\&=e^{-x}\{(-a-b)\sin x+(-b+a)\cos x\}\end{aligned}$$

であるから，$g'(x)=e^{-x}\sin x$ が成り立つための a，b の条件は

$$\begin{cases}-a-b=1\\a-b=0\end{cases}\quad\therefore\quad \boldsymbol{a=b=-\frac{1}{2}}$$ ……(答)

である．

(4) t_n $(n\geqq 0)$ は $f(x)=0$ の解であり $t_n=n\pi$ である．S_1 は $0\leqq x\leqq\pi$ における曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx=\int_0^{\pi}g'(x)\,dx\quad(\because\ (3))\\&=\Big[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big]_0^{\pi}\quad\Big(\because\ (3)\text{ より } g(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big)\\&=-\frac{1}{2}(-e^{-\pi}-1)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(5) S_n は $t_{n-1}\leqq x\leqq t_n$ における曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積であるから

$$S_n=\int_{t_{n-1}}^{t_n}f(x)\,dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$$

ここで，$u=x-(n-1)\pi$ とおくと

$du=dx$

x	$(n-1)\pi$	$\longrightarrow$	$n\pi$
u	0	$\longrightarrow$	π

であり

$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^{\pi}e^{-u-(n-1)\pi}|\sin(u+(n-1)\pi)|\,du\\&=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}e^{-u}|\sin u|\,du\\&=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}e^{-u}\sin u\,du\\&=e^{-(n-1)\pi}S_1\\&=S_1\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$\{S_n\}$ は初項 S_1，公比 $\dfrac{1}{e^{\pi}}$ $\left(0<\dfrac{1}{e^{\pi}}<1\right)$ の等比数列であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{1}{e^{\pi}}}=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\cdot\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1}=\boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$$ ……(答)

である．