関数 $f(x)=(x-1)e^{-x+2}$ に対し，座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ を考える．また，実数 p に対し，点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を ℓ とする．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ を用いてよい．

(2) $f(x)$ の増減および C の凹凸を調べ，C の概形を描け．

(3) P が C の変曲点であるときの p に対し，C の $x \leqq p$ の部分，ℓ の $x \geqq p$ の部分，および x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(25 東京海洋大 海洋工 4 - II)

【答】

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(2) 略

(3) $e-\dfrac{1}{e}$

【解答】

$$C: y=f(x)=(x-1)e^{-x+2}$$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ に注意すると

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} e^2(xe^{-x}-e^{-x})=e^2(0-0)=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x+2}=(-\infty)\cdot(\infty)=\boldsymbol{-\infty} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 微分すると

$$f'(x)=1\cdot e^{-x+2}+(x-1)\cdot e^{-x+2}(-1)=(2-x)e^{-x+2}$$
$$f''(x)=(-1)\cdot e^{-x+2}+(2-x)\cdot e^{-x+2}(-1)=(x-3)e^{-x+2}$$

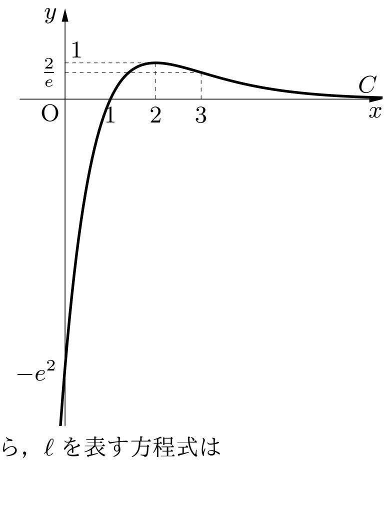
であり，$f(x)$ の増減，凹凸は下表となる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	$\dfrac{2}{e}$	↘

極大値 : $f(2)=1$

変曲点 : $\left(3,\ \dfrac{2}{e}\right)$

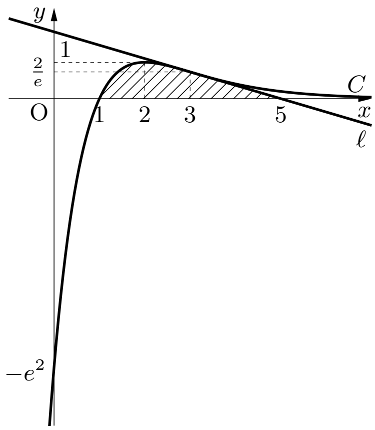
であり，(1) の結果もあわせると C の概形は右図となる．



(3) ℓ は C 上の変曲点 $\mathrm{P}\left(3,\ \dfrac{2}{e}\right)$ における接線であるから，ℓ を表す方程式は

$$y=f'(3)(x-3)+\frac{2}{e}$$
$$y=-\frac{1}{e}(x-3)+\frac{2}{e}$$
$$\therefore\quad \ell: y=-\frac{1}{e}x+\frac{5}{e}$$

C の $x \leqq 3$ の部分，ℓ の $x \geqq 3$ の部分，および x 軸で囲まれる図形は右図の斜線部分である．



この面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^3 f(x)\,dx + \frac{1}{2}\cdot(5-3)\cdot\frac{2}{e}\\
&= \Big[-(x-1)e^{-x+2}\Big]_1^3 + \int_1^3 e^{-x+2}\,dx + \frac{2}{e}\\
&= -\frac{2}{e} + \Big[-e^{-x+2}\Big]_1^3 + \frac{2}{e}\\
&= -\frac{1}{e} + e\\
&= \boldsymbol{e - \frac{1}{e}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．