e を自然対数の底とする．関数 $f(x)$ を次で定める．

$$f(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \geqq 0)$$

座標平面上の曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ を C とおく．

(1) $f(x)$ が最大となる x の値を求めよ．

(2) 座標平面の $x > 0$ の範囲で，曲線 C の変曲点の座標をすべて求めよ．

(3) a を正の実数とし，曲線 C 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線 ℓ が原点を通るとする．

(a) a の値を求めよ．

(b) 曲線 C と接線 ℓ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(25 東京理科大 創域理工学部 3)

【答】

(1) $x = \sqrt{3}$

(2) $\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$\left(\sqrt{6},\ \dfrac{6\sqrt{6}}{e^3}\right)$

(3) (a) $a = \sqrt{2}$ (b) $\dfrac{6}{e} - 2$

【解答】

$$C : y = f(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \geqq 0)$$

(1) $x > 0$ の範囲で $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) \\ &= (3 - x^2)x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

となる．$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	(0)	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

よって，$f(x)$ が最大となる x の値は $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ である． ……(答)

(2) $x > 0$ の範囲で $f'(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= (6x - 4x^3) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + (3x^2 - x^4) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) \\ &= (6 - 7x^2 + x^4)xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 6)xe^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

となる．$x \geqq 0$ における $f(x)$ の凹凸は下表となる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
$f''(x)$	(0)	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f(\sqrt{6}) = \frac{6\sqrt{6}}{e^3}$$

であり，C の変曲点の座標のすべては

$$\left(\mathbf{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{e}}}\right),\quad \left(\sqrt{\mathbf{6}},\ \frac{\mathbf{6}\sqrt{\mathbf{6}}}{\boldsymbol{e}^{\mathbf{3}}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (a) 曲線 C 上の点 $(a,\ f(a))$ $(a>0)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=(3-a^2)a^2e^{-\frac{a^2}{2}}(x-a)+a^3e^{-\frac{a^2}{2}}$$

である．ℓ は原点を通るから

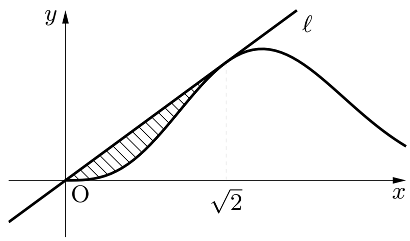
$$0=(3-a^2)a^2e^{-\frac{a^2}{2}}(-a)+a^3e^{-\frac{a^2}{2}}$$
$$0=-(3-a^2)+1 \quad (\because\ a^3e^{-\frac{a^2}{2}}\neq 0)$$
$$a^2=2$$

であり，$a>0$ であるから

$$\boldsymbol{a=\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(b) 曲線 C と接線 ℓ で囲まれる部分は右図の斜線部分であり，面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{2}f(\sqrt{2})-\int_0^{\sqrt{2}}f(x)\,dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{e}-\int_0^{\sqrt{2}}f(x)\,dx \\ &= \frac{2}{e}-\int_0^{\sqrt{2}}f(x)\,dx \end{aligned}$$

である．また，$t=\dfrac{x^2}{2}$ とおくと，$dt=x\,dx$ であり

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int x^2e^{-\frac{x^2}{2}}x\,dx \\ &= \int 2te^{-t}\,dt \\ &= -(2t+2)e^{-t}+C \quad (C\ は積分定数) \\ &= -(x^2+2)e^{-\frac{x^2}{2}}+C \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{e}-\Big[-(x^2+2)e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{e}+\left(\frac{2+2}{e}-2\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{6}{e}-2} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．