次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$$

曲線 $y=f(x)$ を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減，極値，C の凹凸，変曲点を調べて，座標平面上に C の概形をかけ．漸近線は求めなくてよい．(結論に至る過程も記述すること．)

(2) $f(x)$ の最小値を a とし，直線 $y=a$ を l とするとき，C と l で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(25 会津大 5)

【答】

(1) 略

(2) $V=\dfrac{32}{3}\pi^2-12\sqrt{3}\pi$

【解答】

$$C: y=f(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2x\\
&=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{4x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{x(x^2-3)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x)&=\frac{(3x^2-3)\cdot(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-x(x^2-3)\cdot\dfrac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+1)^3}\\
&=\frac{3(x^2-1)\cdot(x^2+1)-3x^2(x^2-3)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}\\
&=\frac{3(3x^2-1)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

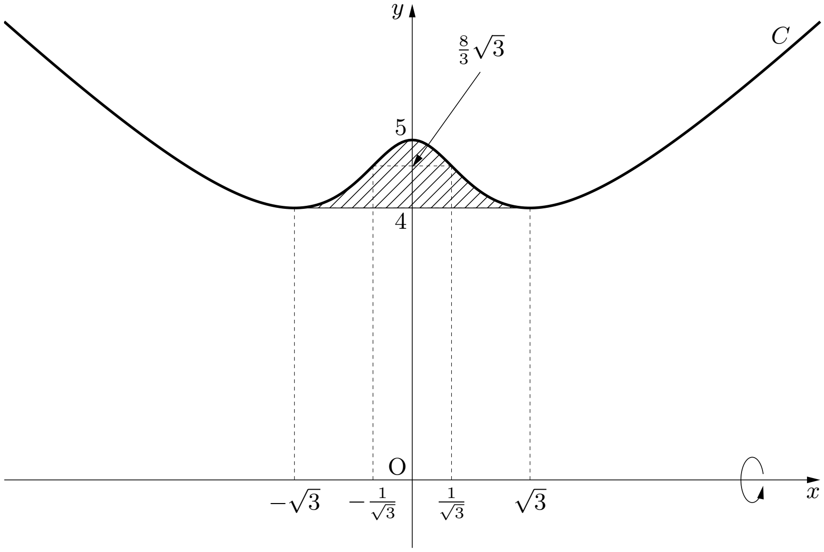
となる．$f'(x)$ の符号は $x=0,\ \pm\sqrt{3}$ で変わり，$f''(x)$ の符号は $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で変わる．$f(x)$ は偶関数であり，グラフは y 軸に関して対称であるから，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減および凹凸を調べると下表となる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	5	↘	$\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$	↘	4	↗

よって，実数全体において $f(x)$ は

$x=0$ で極大値 5，$x=\pm\sqrt{3}$ で極小値 4 をとり，
変曲点は $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{8}{3}\sqrt{3}\right)$

である．C の概形は下図となる．



(2) (1) より，$f(x)$ の最小値は 4 であり，C と $\ell : y=4$ で囲まれた部分は上図の斜線部分である．これを x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= 2\left(\int_0^{\sqrt{3}} \pi y^2\,dx - \pi\cdot 4^2\cdot\sqrt{3}\right)\\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 dx - 32\sqrt{3}\pi\\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left\{(x^2+1)+8+\frac{16}{x^2+1}\right\}dx - 32\sqrt{3}\pi\\
&= 2\pi\left[\frac{x^3}{3}+9x\right]_0^{\sqrt{3}} + 32\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\,dx - 32\sqrt{3}\pi\\
&= 32\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\,dx - 12\sqrt{3}\pi
\end{aligned}$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \sqrt{3} \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であり

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

である．よって

$$\begin{aligned}
V &= 32\pi\cdot\frac{\pi}{3} - 12\sqrt{3}\pi\\
&= \boldsymbol{\frac{32}{3}\pi^2 - 12\sqrt{3}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．