原点を O とする xy 平面において，曲線 $C: y = x^2 - x + 2$ と直線 $L: y = 2x$ で囲まれた図形を S とする．図形 S の境界に含まれる C 上の各点を P として，各点 P から L に垂線をおろし，垂線と L との交点を H とする．線分 PH，線分 OH の長さをそれぞれ r, h とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 P の x 座標を t とするとき，r および h をそれぞれ t を用いて表せ．

(2) 図形 S を直線 L の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

(25 大阪医薬大 医 3)

【答】

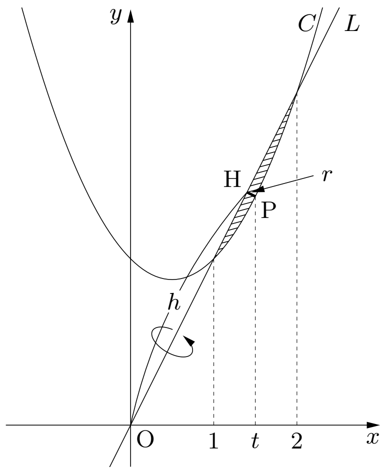
(1) $r = \dfrac{-t^2+3t-2}{\sqrt{5}}$，$h = \dfrac{2t^2-t+4}{\sqrt{5}}$

(2) $V = \dfrac{\pi}{30\sqrt{5}}$

【解答】

$$C: y = x^2 - x + 2$$

$$L: y = 2x$$



(1) r は $\mathrm{P}(t,\ t^2-t+2)$ から直線 $L: 2x - y = 0$ に下した垂線の長さであるから

$$r = \frac{|2t-(t^2-t+2)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|-t^2+3t-2|}{\sqrt{5}}$$

$\mathrm{P}(t,\ t^2-t+2)$ は L 上または下側の点であるから

$$t^2 - t + 2 \leqq 2t$$

$$\therefore\quad -t^2+3t-2 \geqq 0$$

であり

$$\boldsymbol{r = \frac{-t^2+3t-2}{\sqrt{5}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

また，h は O(0, 0) から直線 PH に下した垂線の長さである．直線 PH の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}(x-t) + t^2 - t + 2$$

$$\therefore\quad \mathrm{PH}: x + 2y - 2t^2 + t - 4 = 0$$

であるから

$$h = \frac{|-2t^2+t-4|}{\sqrt{1+2^2}}$$

O は直線 PH の下側の点であるから

$$0 < -\frac{1}{2}(0-t) + t^2 - t + 2$$

$$\therefore\quad t^2 - \frac{1}{2}t + 2 > 0$$

$$\therefore\quad 2t^2 - t + 4 > 0$$

であるから

$$\boldsymbol{h = \frac{2t^2-t+4}{\sqrt{5}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) C と L との交点の x 座標は

$$\begin{aligned}&x^2-x+2=2x\\&x^2-3x+2=0\\&(x-1)(x-2)=0\\\therefore\quad &x=1,\ 2\end{aligned}$$

である．$t=1$ のとき $h=\sqrt{5}$，$t=2$ のとき $h=2\sqrt{5}$ であり，図形 S を直線 L の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}\pi r^2\,dh\\&=\pi\int_1^2\frac{(-t^2+3t-2)^2}{5}\cdot\frac{4t-1}{\sqrt{5}}\,dt\quad\left(\because\ h=\frac{2t^2-t+4}{\sqrt{5}}\text{ と置換}\right)\\&=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_1^2(t-1)^2(t-2)^2(4t-1)\,dt\qquad\cdots\cdots\ ①\\&=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^1u^2(u-1)^2(4u+3)\,du\quad(\because\ u=t-1\text{ と置換})\\&=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^1(4u^5-5u^4-2u^3+3u^2)\,du\\&=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left[\frac{2}{3}u^6-u^5-\frac{1}{2}u^4+u^3\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{30\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

- 部分積分法を用いると次の等式が得られる．

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\quad(m,\ n\text{ は 0 以上の整数})$$

これを用いると ① は

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_1^2(t-1)^2(t-2)^2\{4(t-1)+3\}\,dt\\&=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_1^2\{4(t-1)^3(2-t)^2+3(t-1)^2(2-t)^2\}\,dt\\&=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left\{4\cdot\frac{3!2!}{6!}(2-1)^6+3\cdot\frac{2!2!}{5!}(2-1)^5\right\}\\&=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right)\\&=\frac{\pi}{30\sqrt{5}}\end{aligned}$$

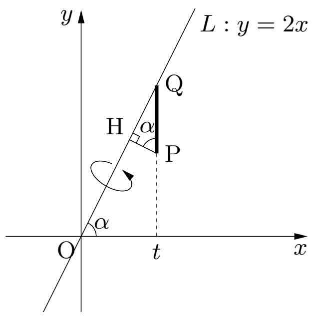
となる．

- C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t+2)$ を通り y 軸と平行な直線と L 上との交点 $(t,\ 2t)$ を Q とおく．線分 PQ が L を軸として回転してできる円錐を切り開くと，次頁の図のような扇形が得られる．この扇形の弧の長さは円錐の底円の周の長さと一致するから

$$2\pi\mathrm{PH}=2\pi r$$

である．L と x 軸正方向とのなす角を α とおくと

$$\tan\alpha=2\qquad\therefore\quad\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

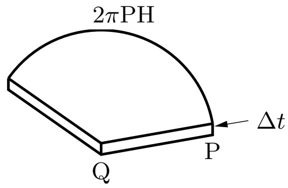


であり

$$\mathrm{PH} = \mathrm{PQ}\cos\alpha = \frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ} = \sqrt{5}\mathrm{PH} = \sqrt{5}r$$

である．微小体積 ΔV は



$$\begin{aligned}
\Delta V &= (\text{扇形の面積})\Delta t \\
&= \frac{1}{2}(\text{扇形の弧の長さ})\mathrm{PQ}\,\Delta t \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot\sqrt{5}r\,\Delta t \\
&= \sqrt{5}\pi r^2\,\Delta t
\end{aligned}$$

であるから，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^2 \sqrt{5}\pi r^2\,dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{5}}\int_1^2 (-t^2+3t-2)^2\,dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{5}}\int_1^2 (t-1)^2(2-t)^2\,dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2!2!}{5!}(2-1)^5 \\
&= \frac{\pi}{30\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

である．