$f(x) = x + \sqrt{2x - x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ とする．原点を O とする座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ と直線 $\ell : y = x$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ の最大値および最小値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ $(0 < x < 2)$ から直線 ℓ に下ろした垂線を PH とする．線分 PH の長さを r，線分 OH の長さを t とするとき，r および t をそれぞれ x を用いて表せ．

(3) 直線 ℓ と直線 $y = -x + 3$ との交点を A，曲線 C と直線 $y = -x + 3$ との交点を B とする．曲線 C と 2 つの線分 OA と AB で囲まれた部分を，直線 ℓ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(25 徳島大 医・歯・薬 3)

【答】

(1) 最大値は $1 + \sqrt{2}$，　最小値は 0

(2) $r = \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{\sqrt{2}}$，$t = \sqrt{2}x + \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{5\sqrt{2}}{12}\pi$

【解答】

$$f(x) = x + \sqrt{2x - x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

(1) 微分すると

$$f'(x) = 1 + \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{\sqrt{2x - x^2} + 1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

である．$\sqrt{2x - x^2} + 1 - x = 0$ を解くと

$$\sqrt{2x - x^2} = x - 1 \cdots\cdots ① \iff \begin{cases} 2x - x^2 = (x-1)^2 \\ x - 1 \geqq 0 \end{cases}$$

第 1 式は

$$2x - x^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad \therefore \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

であり，第 2 式とあわせると

$$x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

である．$0 \leqq x \leqq 2$ での $f(x)$ の増減は下表となる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f(0) = 0$$
$$f(2) = 2$$
$$f\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} + \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} - 1\right) = 1 + \sqrt{2} \quad (\because ①)$$

であり，$f(x)$ の

最大値は $\boldsymbol{1 + \sqrt{2}}$，　最小値は $\boldsymbol{0}$ ……(答)

である

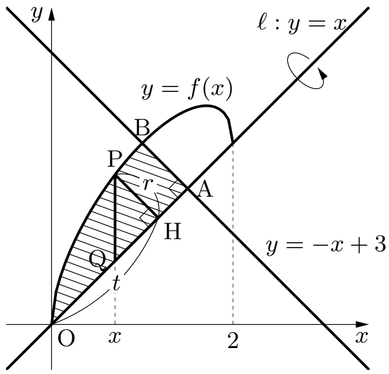
(2) $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ から直線 $\ell : x-y=0$ に下ろした垂線 PH の長さ r は

$$r = \frac{|x-(x+\sqrt{2x-x^2})|}{\sqrt{2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，△PQH は直角二等辺三角形であり，$\mathrm{QH}=\mathrm{PH}=r$ であるから

$$t = \mathrm{OQ}+\mathrm{QH}$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．



(3) 曲線 C と 2 つの線分 OA と AB で囲まれた部分は図の斜線部分であり，直線 ℓ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とおく．

点 A の x 座標は

$$x=-x+3 \qquad \therefore \quad x=\frac{3}{2}$$

であり，$\mathrm{OA}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ である．点 B の x 座標は

$$x+\sqrt{2x-x^2}=-x+3 \iff \begin{cases} 2x-x^2=(3-2x)^2 \\ 3-2x \geqq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2-14x+9=0 \\ x \leqq \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} (x-1)(5x-9)=0 \\ x \leqq \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad x=1$$

である．

$$V = \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{2}} \pi r^2\,dt$$

であり，(2) より，$t=\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2}}$ であるから

$$dt = \left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)dx$$
$$= \left(\sqrt{2}+\frac{1-x}{\sqrt{4x-2x^2}}\right)dx$$

t	$0 \longrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{2}$
x	$0 \longrightarrow 1$

である．よって

$$V = \pi\int_0^1 \frac{2x-x^2}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1-x}{\sqrt{4x-2x^2}}\right)dx$$
$$= \pi\int_0^1 \left(\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}+\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2\sqrt{2}}\right)dx$$
$$= \pi\int_0^1 \left(\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}+\frac{(2x-x^2)'\sqrt{2x-x^2}}{4\sqrt{2}}\right)dx$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{12}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．