曲線 $y = x^2$ と曲線 $x = 8y^2$ で囲まれた図形 D の面積を S とおくと，$S = \boxed{\text{（け）}}$ である．また，D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とおくと，$V = \boxed{\text{（こ）}}$ である．

(25 茨城大 後 工 1(6))

【答】

（け）	（こ）
$\dfrac{1}{24}$	$\dfrac{3}{320}\pi$

【解答】

$$y = x^2$$

$$x = 8y^2$$

2 曲線の交点の x 座標は

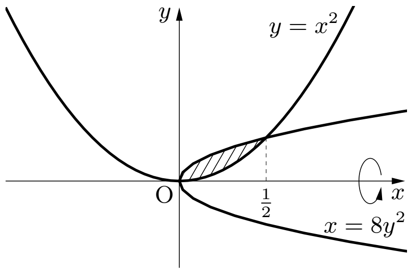
$$x = 8(x^2)^2$$

$$x(8x^3 - 1) = 0$$

$$x(2x-1)(4x^2+2x+1) = 0$$

$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ より

$$x = 0,\ \frac{1}{2}$$



であり，2 曲線で囲まれた図形 D は右図の斜線部分である．D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{x}{8}} - x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{8}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}} \end{aligned}$$

……(答)

である．また，D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{2}} \pi \frac{x}{8}\, dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \pi (x^2)^2\, dx \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{16}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{80}\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{320}\pi} \end{aligned}$$

……(答)

である．