座標平面において，曲線 $C : y = (x-2)^2$ と，C 上の点 A(2, 0) を通る傾き a の直線 ℓ を考える．ただし，$a > 0$ とする．曲線 C と y 軸および直線 ℓ で囲まれた図形を D_1 とし，曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形を D_2 とする．D_1, D_2 を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ $V_1(a)$, $V_2(a)$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 曲線 C と直線 ℓ の交点のうち，点 A と異なる点の座標を a を用いて表せ．

(2) $V_1(a)$ および $V_2(a)$ を求めよ．

(3) $V(a) = V_1(a) - V_2(a)$ とする．関数 $V(a)$ の極値を求めよ．

(4) $0 < a < 2$ のとき，図形 D_1 を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を a を用いて表せ．

(25 茨城大 理 1)

【答】

(1) $(a+2,\ a^2)$

(2) $V_1(a) = \dfrac{8}{3}(a+1)\pi$，$V_2(a) = \left(\dfrac{a^4}{6} + \dfrac{2}{3}a^3\right)\pi$

(3) $a = 1$ で極大値 $\dfrac{9}{2}\pi$

(4) $\left(\dfrac{2}{15}a^5 + \dfrac{32}{5}\right)\pi$

【解答】

$$C : y = (x-2)^2$$

(1) C 上の点 A(2, 0) を通る傾き a $(a > 0)$ の直線 ℓ の方程式は

$$\ell : y = a(x-2)$$

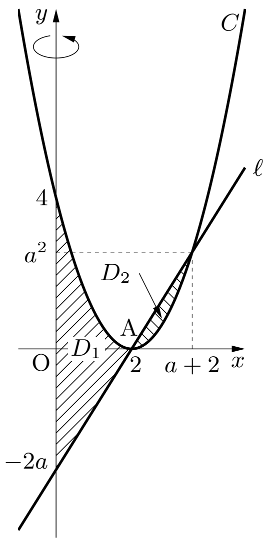
である．C と ℓ の交点の x 座標は

$$(x-2)^2 = a(x-2)$$
$$(x-2)(x-2-a) = 0$$
$$\therefore\quad x = 2,\ 2+a$$

よって，点 A と異なる交点の座標は

$$\boldsymbol{(a+2,\ a^2)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．



(2) $y = (x-2)^2$ を x について解くと

$$x = 2 \pm \sqrt{y}$$

となる．D_1, D_2 を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体のそれぞれの体積 $V_1(a)$, $V_2(a)$ は

$$\begin{aligned}
V_1(a) &= \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2a + \pi\int_0^4 (2-\sqrt{y})^2\,dy \\
&= \frac{8}{3}\pi a + \pi\int_0^4 (4 - 4\sqrt{y} + y)\,dy \\
&= \frac{8}{3}\pi a + \pi\left[4y - \frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2}\right]_0^4 \\
&= \frac{8}{3}\pi a + \pi\left(16 - \frac{64}{3} + 8\right) \\
&= \frac{8}{3}\pi a + \frac{8}{3}\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{8}{3}(a+1)\pi} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2(a) &= \pi\int_0^{a^2}(2+\sqrt{y})^2\,dy - \pi\int_0^{a^2}\left(\frac{y}{a}+2\right)^2\,dy \\
&= \pi\int_0^{a^2}(4+4\sqrt{y}+y)\,dy - \pi\left[\frac{a}{3}\left(\frac{y}{a}+2\right)^3\right]_0^{a^2} \\
&= \pi\left[4y+\frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{y^2}{2}\right]_0^{a^2} - \frac{a\pi}{3}\{(a+2)^3-8\} \\
&= \pi\left(4a^2+\frac{8}{3}a^3+\frac{a^4}{2}\right) - \frac{a\pi}{3}(a^3+6a^2+12a) \\
&= \boldsymbol{\left(\frac{a^4}{6}+\frac{2}{3}a^3\right)\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) (2) より

$$\begin{aligned}
V(a) &= V_1(a) - V_2(a) \\
&= \frac{8}{3}(a+1)\pi - \left(\frac{a^4}{6}+\frac{2}{3}a^3\right)\pi \\
&= \left(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}a-\frac{2}{3}a^3-\frac{a^4}{6}\right)\pi
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
V'(a) &= \left(\frac{8}{3}-2a^2-\frac{2}{3}a^3\right)\pi \\
&= -\frac{2}{3}(a^3+3a^2-4)\pi \\
&= -\frac{2}{3}(a-1)(a+2)^2\pi
\end{aligned}$$

である．$a>0$ における $V(a)$ の増減は下表となる．

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$V'(a)$		$+$	0	$-$
$V(a)$		↗		↘

よって，$V(a)$ は

$$\boldsymbol{a=1}\ \textbf{で極大値}\ \frac{16+16-4-1}{6}\pi = \boldsymbol{\frac{9}{2}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(4) ℓ を x 軸に関して対称移動した直線 $y=-a(x-2)$ と y 軸の交点の座標は $(0,\ 2a)$ である．

$0<a<2$ より，$0<2a<4$ であり，図形 D_1 を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は，右図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体と一致する．

よって，この立体の体積は

$$\begin{aligned}
&\pi\int_0^{2-a}(x-2)^4\,dx + \frac{1}{3}\pi(a^2)^2\cdot\{2-(2-a)\} \\
&= \pi\left[\frac{(x-2)^5}{5}\right]_0^{2-a} + \frac{a^5}{3}\pi \\
&= \pi\left(-\frac{a^5}{5}+\frac{32}{5}\right) + \frac{a^5}{3}\pi \\
&= \boldsymbol{\left(\frac{2}{15}a^5+\frac{32}{5}\right)\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．