次の問いに答えよ．

(1) 等式 $a+b+c=20$ を満たす負でない整数 $a,\ b,\ c$ の組の総数を求めよ．

(2) 等式 $a+b+c=20$ を満たす正の整数 $a,\ b,\ c$ の組の総数を求めよ．

(3) 不等式 $10 \leqq a+b+c \leqq 20$ を満たす正の整数 $a,\ b,\ c$ の組の総数を求めよ．

(25 宇都宮大 データ経営 (理・文) 4 A)

---

【答】

(1) 231
(2) 171
(3) 1056

---

【解答】

(1) $$a+b+c=20 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす 0 以上の整数解の組 $(a,\ b,\ c)$ の総数は 20 個の球と 2 本の仕切り棒の並び方の総数と一致するから，その総数は

$$_{22}\mathrm{C}_2 = \frac{22 \cdot 21}{2 \cdot 1} = \mathbf{231} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ① を満たす 0 以上の整数解の組 $(a,\ b,\ c)$ は 3 種類のものの中から重複を許して 20 個をとる取り方の総数であるから

$$_3\mathrm{H}_{20} = {}_{3+20-1}\mathrm{C}_{20} = {}_{22}\mathrm{C}_{20} = \frac{22 \cdot 21}{2 \cdot 1} = 231$$

である．

- ① を満たす 0 以上の整数 $a,\ b,\ c$ において，$c$ を $0 \leqq c \leqq 20$ の範囲で固定すると

$$a+b=20-c$$

であり，これを満たす組 $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b)=(0,\ 20-c),\ (1,\ 19-c), \cdots, (20-c,\ 0)$$

の $21-c$ 個ある．よって，① を満たす 0 以上の整数解の組 $(a,\ b,\ c)$ の総数は

$$\sum_{c=0}^{20}(21-c) = \frac{21(21+1)}{2} = 231 \quad (\because\ 等差数列の和)$$

である．

(2) $$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 15) \longleftrightarrow \bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc\bigcirc}_{15\ 個}$$

といった具合に，①を満たす正の整数の組は，20 個の球を並べたときのすき間 19ヵ所に 2 本の仕切り棒を 1 本ずつ入れる 2ヵ所の選び方に対応するから，その総数は

$$_{19}\mathrm{C}_2 = \frac{19 \cdot 18}{2 \cdot 1} = \mathbf{171} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $a=A+1,\ b=B+1,\ c=C+1$ とおくと

$$\begin{aligned} a+b+c=20 &\iff (A+1)+(B+1)+(C+1)=20 \\ &\iff A+B+C=17 \end{aligned}$$

$A,\ B,\ C$ は 0 以上の整数だから，これらを満たす $A,\ B,\ C$ の組は異なる 3 種類のものの中から，重複を許して 17 個を取り出す重複組合せに等しい．よって，求める個数は

$$_3\mathrm{H}_{17} = {}_{3+17-1}\mathrm{C}_{17} = {}_{19}\mathrm{C}_{17} = \frac{19 \cdot 18}{2 \cdot 1} = 171$$

である．

- $c$ を $1 \leqq c \leqq 18$ の範囲で固定するとき $a+b=20-c$ となる正の整数の組 $(a,\ b)$ は

  $$(a,\ b)=(1,\ 19-c),\ (2,\ 18-c),\ \cdots,(19-c,\ 1)$$

  の $19-c$ 個があるから，①をみたす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は

  $$\sum_{c=1}^{18}(19-c)=\frac{18\cdot(18+1)}{2}=171 \quad (\because\ \text{等差数列の和})$$

  である．

(3)
$$a+b+c=k \quad (k=10,\ 11,\ \cdots,\ 20) \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす正の整数の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の総数は，(2) と同様に考えて

$$ {}_{k-1}\mathrm{C}_2=\frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

であり，求める組の総数は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=10}^{20}\frac{(k-1)(k-2)}{2}\\
&=\sum_{k=10}^{20}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\{k(k-1)(k-2)-(k-1)(k-2)(k-3)\}\\
&=\frac{1}{6}(20\cdot19\cdot18-9\cdot8\cdot7)\\
&=20\cdot19\cdot3-3\cdot4\cdot7\\
&=1140-84\\
&=\mathbf{1056}
\end{aligned}$$

……(答)

である．