白い玉と赤い玉が 2 個ずつ入った袋がある．$x_0 = 0$ とし，以下のルールに従って，x_1，x_2，x_3 を順に定める．

ルール：「1 枚の硬貨を投げ，次に袋から玉を取り出す」という一連の作業を 3 回繰り返す．

- t 回目 ($t = 1,\ 2,\ 3$) の試行において，硬貨を投げて表が出た場合は，袋から玉を 1 個取り出し，色を調べてから袋に戻す．
  - 赤い玉が取り出された場合，$x_t = x_{t-1} + 1$ とし，
  - 白い玉が取り出された場合，$x_t = x_{t-1} - 1$ とする．
- t 回目 ($t = 1,\ 2,\ 3$) の試行において，硬貨を投げて裏が出た場合は，袋から同時に玉を 2 個取り出し，色を調べてから袋に戻す．
  - 赤い玉が 2 個取り出された場合，$x_t = x_{t-1} + 2$ とし，
  - 白い玉が 2 個取り出された場合，$x_t = x_{t-1} - 2$ とし，
  - 白い玉と赤い玉が 1 個ずつ取り出された場合，$x_t = x_{t-1}$ とする．

(a) $x_1 = 0$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であり，$x_1 = 1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ であり，$x_1 = 2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である．

(b) $x_2 = 0$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

(c) $x_3 = 0$ となる確率は $\dfrac{\boxed{コサシ}}{\boxed{スセソ}}$ である．

(25 東京理科大 工学部 1(2))

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カキ	ク	ケ	コサシ	スセソ
1	3	1	4	1	12	1	4	179	864

【解答】

(a) $x_0 = 0$ であるから，$x_1 = 0$ となるのは，1 回目の試行において，硬貨は裏が出て，袋から白い玉と赤い玉を 1 個ずつ取り出すときである．この確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \mathbf{\frac{1}{3}} \quad \cdots\cdots(答)$$

であり，$x_1 = 1$ となるのは，1 回目の試行において，硬貨は表が出て，袋から赤い玉を取り出すときである．この確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{4}} \quad \cdots\cdots(答)$$

であり，$x_1 = 2$ となるのは，1 回目の試行において，硬貨は裏が出て，袋から赤い玉 2 個を取り出すときである．この確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \cdot 3} = \boldsymbol{\frac{1}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(b) ルールにより決まる x_t を得点と呼ぶことにすると

$$x_t - x_{t-1} = 0,\ \pm 1,\ \pm 2$$

は得点の増減を表す．(1) と同じ計算により，$x_t - x_{t-1} = 0,\ 1,\ 2$ となる確率は順に

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{12}$$

であり，$x_t - x_{t-1} = -1,\ -2$ となる確率は順に

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{12}$$

である．

$x_0 = 0$ であるから $x_2 = 0$ となるのは，得点の増減の起こり方が

- 0 が 2 回
- -1 と 1 が 1 回ずつ
- -2 と 2 が 1 回ずつ

のいずれかである．これらは排反であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{8+9+1}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{18}{2^3 \cdot 3^2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(c) $x_0 = 0$ であるから $x_3 = 0$ となるのは，得点の増減の起こり方が

- 0 が 3 回
- $-1,\ 1,\ 0$ が 1 回ずつ
- $-2,\ 2,\ 0$ が 1 回ずつ
- -1 が 2 回と 2 が 1 回ずつ
- 1 が 2 回と -2 が 1 回ずつ

のいずれかである．これらは排反であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3! \times \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + 3! \times \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} + {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^6} \\ &= \frac{64+216+24+27+27}{2^6 \cdot 3^3} \\ &= \frac{358}{2^6 \cdot 3^3} \\ &= \boldsymbol{\frac{179}{864}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．