(1) n を正の整数とする．二項係数に関する等式

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} $$

が成り立つことを示せ．

(2) コインを 1 枚投げる．投げたときの表裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ である．表が出れば得点は 1 点とし，裏が出れば得点は -1 点とする．この試行を 12 回繰り返す．1 回目から k 回目までの合計得点を S_k 点とする．ただし S_1 点は 1 回目の得点である．次の問いに答えよ．

(i) $S_{12}=0$ となる確率を求めよ．

(ii) $S_{12}=0$ であったとき，S_1，S_2，$\cdots$，S_{11} がすべて負である確率を求めよ．

(25 大阪医薬大 医 4)

【答】

(1) 略

(2) (i) $\dfrac{231}{1024}$ (ii) $\dfrac{1}{22}$

【解答】

(1) 左辺を変形する．

$$ \begin{aligned} {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1!)} \\ &= \frac{(2n)!(n+1)}{(n+1)!n!} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!n!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり}) \end{aligned} $$

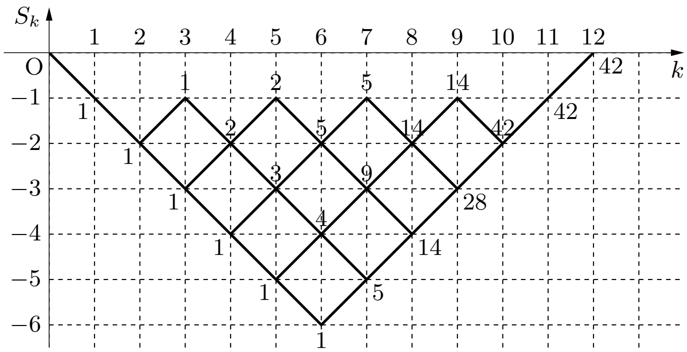
である．

(2) (i) $S_{12}=0$ となるのは 12 回のコイン投げで表が 6 回，裏が 6 回出るときである．その確率は

$$ \begin{aligned} {}_{12}\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6 &= \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6!}\frac{1}{2^{12}} \\ &= \frac{2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 7}{2^{12}} \\ &= \boldsymbol{\frac{231}{1024}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned} $$

である．

(ii) $S_{12}=0$ かつ S_1，S_2，$\cdots$，S_{11} がすべて負である得点とり方の総数は



図より 42 通りある．その確率は

$$\frac{42}{2^{12}} = \frac{21}{2^{11}}$$

であり，求める条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{21}{2^{11}}}{\dfrac{3 \cdot 11 \cdot 7}{2^{10}}} = \mathbf{\frac{1}{22}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- (1) の等式を利用した解法もある．

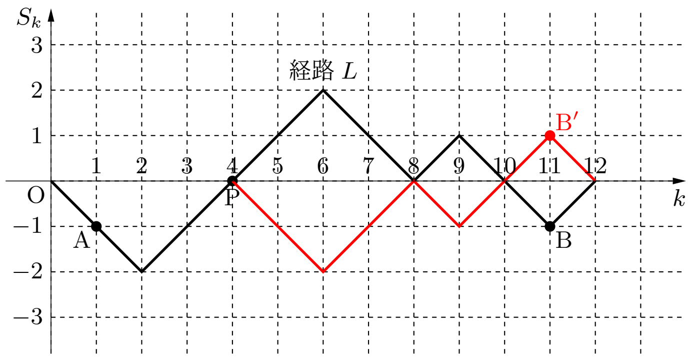
  題意を満たす経路は，点 A$(1,\ -1)$，点 B$(11,\ -1)$ を経由することが必要である．この動きをする経路の総数は，題意を満たさないものも含めると，$\nearrow$5 個，$\searrow$5 個の並び方を数えて

  ${}_{10}\mathrm{C}_5$ 通り

  ある．

  このうち題意を満たさないもの (k 軸上と共有点をもつもの) が何通りあるか数える．

  題意を満たさない経路のひとつを L とおく．L が初めて k 軸に達したときの点を P とおく．L のうち，点 P 以降の経路を k 軸について折り返すと，下図の赤色の経路となり，点 B は B$'(11,\ 1)$ に移る．このように，経路 L は点 A から B$'$ を経由して $(12,\ 0)$ に至る経路に置き換えることができる．



  逆に，点 A から B$'$ を経由して $(12,\ 0)$ に至る経路において，初めて k 軸に達した以降の経路を k 軸に関して折り返すと，A から B を経由して $(12,\ 0)$ に至る経路のうちで題意を満たさないもののひとつになる．

  したがって，A から B を経由して $(12,\ 0)$ に至る経路のうち題意を満たさないものと，A から B$'$ を経由して $(12,\ 0)$ に至る経路とは 1 対 1 に対応するので，題意を満たさない経路の総数は，$\nearrow$6 個，$\searrow$4 個の並び方を数えて

  ${}_{10}\mathrm{C}_4$ 通り

  ある．以上から，題意を満たす経路の総数は

$$\begin{aligned} {}_{10}\mathrm{C}_5 - {}_{10}\mathrm{C}_4 &= {}_{2\cdot5}\mathrm{C}_5 - {}_{2\cdot5}\mathrm{C}_4 = \frac{{}_{2\cdot5}\mathrm{C}_5}{5+1} \quad (\because\ (1)) \\ &= \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= 42\ (通り) \end{aligned}$$

  である．以下【解答】と同じ．