1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚の番号札が箱の中に入っている．この箱から番号札を 1 枚取り出し，数字を記録してからもとに戻すという試行を 3 回繰り返す．記録した数字の最大値を X，最小値を Y とするとき，次の問いに答えよ．ただし，設問 (1) は結果のみを解答せよ．

(1) $X > Y$ である確率を求めよ．

(2) $X \leqq Y + 2$ である確率を求めよ．

(3) $X \geqq 8$ のとき，$Y \leqq 2$ である条件付き確率を求めよ．

(25 大阪医薬大 後 医 4)

【答】

(1) $\dfrac{99}{100}$

(2) $\dfrac{4}{25}$

(3) $\dfrac{30}{73}$

【解答】

記録した数字を順に a_1，a_2，a_3 とおく．組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の総数は 10^3 通りあり，これらの起こり方は同様に確からしい．

(1) a_1，a_2，a_3 の最大値が X，最小値が Y であり，$X > Y$ となる事象の余事象は $X = Y$ である．$X = Y$ となるのは

$$a_1 = a_2 = a_3$$

のときであり，10 通りある．求める確率は

$$1 - \frac{10}{10^3} = 1 - \frac{1}{100} = \boldsymbol{\frac{99}{100}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $X \leqq Y + 2$ となるのは，$Y \leqq X$ であることにも注意すると

$$X = Y,\ Y + 1,\ Y + 2$$

の 3 通りがある．

(i) $X = Y$ となるのは

$$a_1 = a_2 = a_3$$

のときであり，10 通りある．

(ii) $X = Y + 1$ となるのは

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3\} = \{Y,\ Y,\ Y + 1\},\ \{Y,\ Y + 1,\ Y + 1\}$$

のときであり，Y は 9 通りあり，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ はどちらも 3 通りあるから

$$9 \times (3 + 3) = 54 \text{ 通り}$$

ある．

(iii) $X = Y + 2$ となるのは

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3\} = \{Y,\ Y + 1,\ Y + 2\},\ \{Y,\ Y,\ Y + 2\},\ \{Y,\ Y + 2,\ Y + 2\}$$

のときであり，Y は 8 通りあり，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ はそれぞれ 3! 通り，3 通り，3 通りあるから

$$8 \times (6 + 3 + 3) = 96 \text{ 通り}$$

ある．

よって，求める確率は

$$\frac{10+54+96}{10^3}=\frac{160}{10^3}=\mathbf{\frac{4}{25}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $X \geqq 8$ となる事象を A，$Y \leqq 2$ となる事象を B とおくと，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

である．余事象を考えると

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}\end{aligned}$$

である．ここで

$$P(\overline{A})=\frac{7^3}{10^3}=\frac{343}{10^3} \quad (\because\ a_1,\ a_2,\ a_3 \leqq 7)$$

$$P(\overline{B})=\frac{8^3}{10^3}=\frac{512}{10^3} \quad (\because\ 3 \leqq a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{5^3}{10^3}=\frac{125}{10^3} \quad (\because\ 3 \leqq a_1,\ a_2,\ a_3 \leqq 7)$$

であるから

$$P(A)=1-\frac{343}{10^3}=\frac{1000-343}{10^3}=\frac{657}{10^3}$$

$$P(A\cap B)=1-\frac{343+512-125}{10^3}=\frac{1000-730}{10^3}=\frac{270}{10^3}$$

であり，求める確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B)=\frac{270}{657}=\mathbf{\frac{30}{73}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．