1 個のさいころを 4 回続けて投げる反復試行において，さいころの出る目を順に X_1，X_2，X_3，X_4 として xy 平面上の 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 を以下のように定める．

1. 原点 O から x 軸の正の向きに X_1 だけ進んだ位置にある点を P_1 とする．
2. P_1 から y 軸の正の向きに X_2 だけ進んだ位置にある点を P_2 とする．
3. P_2 から x 軸の負の向きに X_3 だけ進んだ位置にある点を P_3 とする．
4. P_3 から y 軸の負の向きに X_4 だけ進んだ位置にある点を P_4 とする．

例えば，さいころの出た目が順に 3，2，5，5 ならば，P_1，P_2，P_3，P_4 の座標はそれぞれ $(3,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(-2,\ 2)$，$(-2,\ -3)$ となる．

(1) P_4 が O と一致する確率は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}\boxed{3}}$ である．

(2) 線分 OP_1 と線分 $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ が共有点をもつ確率は $\dfrac{\boxed{4}\boxed{5}}{\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}}$ である．

ただし，線分は両方の端点を含むものとする．

(3) P_4 の座標が $(3,\ 3)$ である確率は $\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}}$ である．

(25 青山学院大 理工 A 1)

【答】

1	23	45	678	9	101112
1	36	49	144	1	144

【解答】

1 個のさいころを 4 回投げるときの目の出方は，6^4 通りあり，これらは同様に確からしい．
条件より，P_1，P_2，P_3，P_4 の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}_1(X_1,\ 0),\ \mathrm{P}_2(X_1,\ X_2),\ \mathrm{P}_3(X_1-X_3,\ X_2),\ \mathrm{P}_4(X_1-X_3,\ X_2-X_4)$$

である．ここで，X_k は k 回目 $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に出る目であり，$X_k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ である．

(1) P_4 が O と一致するのは

$$\begin{cases}(\mathrm{P}_4\text{の } x \text{ 座標})=0\\(\mathrm{P}_4\text{の } y \text{ 座標})=0\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}X_1=X_3\\X_2=X_4\end{cases}$$

となるときである．

$X_1=X_3$ となる目の出方は　$X_1=X_3=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ の 6 通り，
$X_2=X_4$ となる目の出方も　6 通り

あるから，求める確率は

$$\frac{6\cdot 6}{6^4}=\boldsymbol{\frac{1}{36}}$$ ……(答)

である．

(2) 線分 OP_1 と線分 $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ が共有点をもつのは

$$\begin{cases}(\mathrm{P}_4\text{の } x \text{ 座標})\geqq 0\\(\mathrm{P}_4\text{の } y \text{ 座標})\leqq 0\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}X_1\geqq X_3\\X_2\leqq X_4\end{cases}$$

となるときである．

$X_1 \geqq X_3$ となる目の出方は　$\dfrac{6^2-6}{2}+6=21$ 通り，

$X_2 \leqq X_4$ となる目の出方も　21 通り

あるから，求める確率は

$$\frac{21\cdot 21}{6^4}=\mathbf{\frac{49}{144}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) P_4 の座標が $(3,\ 3)$ となるのは，

$$\begin{cases} X_1-X_3=3 \\ X_2-X_4=3 \end{cases}$$

となるときである．

$X_1-X_3=3$ となる目の出方は　$(X_1,\ X_3)=(4,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 3)$ の 3 通り，

$X_2-X_4=3$ となる目の出方も　3 通り

あるから，求める確率は

$$\frac{3\cdot 3}{6^4}=\mathbf{\frac{1}{144}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．