a, s を実数とする．初項 s，公差 s の等差数列を $\{x_n\}$ とし，初項 as，公差 as の等差数列を $\{y_n\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) N 個の値 x_1，x_2，$\cdots$，x_N からなるデータの平均値と分散を求めよ．

(3) $2N$ 個の値 x_1，x_2，$\cdots$，x_N，y_1，y_2，$\cdots$，y_N からなるデータの平均値と分散を求めよ．

(26 宇都宮大学 データサイエンス経営学部 (理系・文系) 4 B)

【答】

(1) $x_n = sn$

(2) (平均値) $= \dfrac{s(N+1)}{2}$，(分散) $= \dfrac{s^2(N+1)(N-1)}{12}$

(3) (平均値) $= \dfrac{(a+1)s(N+1)}{4}$，(分散) $= \dfrac{s^2}{48}(N+1)\left\{(5a^2-6a+5)N-(a^2-6a+1)\right\}$

【解答】

(1) 数列 $\{x_n\}$ は初項 s，公差 s の等差数列であるから，一般項 x_n は

$$x_n = s+(n-1)s = \boldsymbol{sn} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) N 個の値 x_1，x_2，$\cdots$，x_N からなるデータの平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(sn) = \frac{s}{N}\cdot\frac{N(N+1)}{2} = \boldsymbol{\frac{s(N+1)}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，分散 ${s_x}^2$ は

$$\begin{aligned}
{s_x}^2 &= \overline{x^2}-\overline{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(sn)^2-\overline{x}^2 \\
&= \frac{s^2}{N}\,\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\left\{\frac{s(N+1)}{2}\right\}^2 \\
&= \frac{2s^2(N+1)(2N+1)-3s^3(N+1)^2}{12} \\
&= \boldsymbol{\frac{s^2(N+1)(N-1)}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) 数列 $\{y_n\}$ は初項 as，公差 as の等差数列であるから，一般項 y_n は

$$y_n = as+(n-1)as = asn$$

である．

$2N$ 個の値 x_1，x_2，$\cdots$，x_N，y_1，y_2，$\cdots$，y_N からなるデータの平均値は

$$\begin{aligned}
(\text{平均値}) &= \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}(sn+asn) = \frac{(a+1)s}{2N}\cdot\frac{N(N+1)}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{(a+1)s(N+1)}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

であり，分散は

$$\begin{aligned}
(\text{分散}) &= \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}\left\{(sn)^2+(asn)^2\right\}-\left\{\frac{(a+1)s(N+1)}{4}\right\}^2 \\
&= \frac{(a^2+1)s^2}{2N}\cdot\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{(a+1)^2s^2(N+1)^2}{16} \\
&= \frac{s^2(N+1)}{48}\left\{4(a^2+1)(2N+1)-3(a^2+2a+1)(N+1)\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{s^2}{48}(N+1)\left\{(5a^2-6a+5)N-(a^2-6a+1)\right\}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．