関数 $f(x)$ は，すべての実数 x およびすべての整数 n について $f(nx)=\{f(x)\}^n$ を満たし，さらに $f(1)=2$ を満たすとする．ただし，$f(x)$ のとりうる値は 0 でない実数とする．

(1) $f(n) \leqq 100$ となるような最大の整数 n を求めよ．
(2) すべての実数 x について $f(x)>0$ であることを証明せよ．
(3) $f(0.25)$ を求めよ．
(4) a が有理数のとき，$f(a)$ を a で表せ．

(25 北海道大 文 4)

【答】

(1) 6
(2) 略
(3) $f(0.25)=2^{\frac{1}{4}}$
(4) $f(a)=2^a$

【解答】

$$f(nx)=\{f(x)\}^n \qquad \cdots\cdots ①$$

$$f(1)=2 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ① で $x=1$ とおくと

$$f(n)=\{f(1)\}^n=2^n \quad (\because ②)$$

$f(n)$ は n について単調増加であり，$2^6=64$，$2^7=128$ であるから，$f(n) \leqq 100$ となるような最大の整数 n は

6 ……(答)

である．

(2) すべての実数 x について

$$f(x)=f\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2 \geqq 0$$

である．$f(x)$ のとりうる値は 0 でないこともあわせると，すべての実数 x について

$$f(x)>0$$

である． …… (証明終わり)

(3) $0.25=\dfrac{1}{4}$ であることに注意すると

$$f(1)=f\left(4\cdot\frac{1}{4}\right)=\{f(0.25)\}^4$$

であるから，② は

$$\{f(0.25)\}^4=2$$

となり，(2) より $f(0.25)>0$ であるから

$$\boldsymbol{f(0.25)=2^{\frac{1}{4}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) a が有理数のとき

$$a = \frac{p}{q} \ (p,\ q \text{ は互いに素な整数},\ q > 0)$$

と表すことができ

$$f(a) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{q}\right)\right\}^p$$

が成り立つ．(3) と同じく

$$f(1) = f\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{q}\right)\right\}^q$$

$$\therefore \quad \left\{f\left(\frac{1}{q}\right)\right\}^q = 2$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{q}\right) = 2^{\frac{1}{q}} (> 0)$$

よって

$$f(a) = (2^{\frac{1}{q}})^p = 2^{\frac{p}{q}} = 2^a \qquad \therefore \quad \boldsymbol{f(a) = 2^a}$$ ……(答)

である．