b を実数の定数とし，方程式

$$4^x - b \cdot 2^{x+1} + b + 6 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

について考える．また，$t = 2^x$ とする．

(i) 方程式 ① を t についての 2 次方程式 (ただし，t^2 の係数を 1 とする) に書き換えた式を答えなさい．

(ii) x がすべての正の実数値をとって変化するとき，t のとりうる値の範囲を答えなさい．

(iii) 方程式 ① が異なる 2 つの正の実数解をもつとき，b のとりうる値の範囲を，導出の過程も示して，答えなさい．

(25 大阪医薬大 薬 B3(2))

【答】

(1) $t^2 - 2bt + b + 6 = 0$
(2) $t > 1$
(3) $3 < b < 7$

【解答】

$$4^x - b \cdot 2^{x+1} + b + 6 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $t = 2^x$ とおくと，① は

$$\boldsymbol{t^2 - 2bt + b + 6 = 0} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

(2) $t = 2^x$ は単調増加な関数であり

$$2^0 = 1, \quad \lim_{t\to\infty} 2^x = \infty$$

であるから，x がすべての正の実数値をとって変化するときの t のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{t > 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $t = 2^x$ を満たす x と t は 1 対 1 に対応するから，方程式 ① が異なる 2 つの正の実数解をもつ条件は，方程式 ② が異なる 2 つの 1 より大きい実数解をもつことである．$f(t) = t^2 - 2bt + b + 6$ とおき，$y = f(t)$ のグラフを考えると，求める条件は

$$\begin{cases} \text{判別式}: b^2 - (b+6) > 0 \\ \text{軸の位置}: t = b > 0 \\ \text{端点の符号}: f(1) = 1^2 - 2b \cdot 1 + b + 6 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+2)(b-3) > 0 \\ b > 0 \\ 7 - b > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b < -2 \text{ または } 3 < b \\ 0 < b < 7 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{3 < b < 7} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．