不等式 $4\log_4(x+1) \leqq \log_2(5-x)-1$ を満たす x のとりうる値の範囲を答えなさい.

(25 大阪医薬大 薬 A 2(1))

【答】 $-1 < x \leqq \dfrac{1}{2}$

【解答】

$$4\log_4(x+1) \leqq \log_2(5-x)-1 \qquad \cdots\cdots ①$$

真数条件より，x は

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad -1<x<5 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす．このとき

$$\begin{aligned} ① &\iff 4\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4} \leqq \log_2(5-x) - \log_2 2 \\ &\iff 2\log_2(x+1) \leqq \log_2 \frac{5-x}{2} \\ &\iff (x+1)^2 \leqq \frac{5-x}{2} \quad (\because \ 底\ 2>1) \end{aligned}$$

この不等式を解くと

$$\begin{aligned} &2(x^2+2x+1) \leqq 5-x \\ &2x^2+5x-3 \leqq 0 \\ &(2x-1)(x+3) \leqq 0 \\ \therefore \quad &-3 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

② とあわせると，x のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-1 < x \leqq \frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．