p, q, r はそれぞれ 1 より大きい実数であり，$p^2 = q^3 = r^6$ とする．

(i) $\log_p q$ の値を答えなさい．

(ii) $\log_p qr + \log_q rp + \log_r pq$ の値を答えなさい．

(25 大阪医薬大 薬 B 2(2))

【答】

(i) $\dfrac{2}{3}$

(ii) 8

【解答】

$$p > 1,\ q > 1,\ r > 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$p^2 = q^3 = r^6 \qquad \cdots\cdots ②$$

(i) ① より，式 ② の値は正であり対数をとることができる．

$$\begin{aligned} ② &\iff \log p^2 = \log q^3 = \log r^6 \ (\text{底は } 10 \text{ とし，略記する}) \\ &\iff 2\log p = 3\log q = 6\log r \quad (\because\ ①) \qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

である．

$$\log_p q = \frac{\log q}{\log p} = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \quad (\because\ ③) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) (i) と同じく ③ より

$$\frac{\log r}{\log p} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\log r}{\log q} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

が得られる．

$$\begin{aligned} &\log_p qr + \log_q rp + \log_r pq \\ &= \frac{\log q + \log r}{\log p} + \frac{\log r + \log p}{\log q} + \frac{\log p + \log q}{\log r} \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{1} + \frac{2}{1}\right) \\ &= 1 + 2 + 5 \\ &= \boldsymbol{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．