

次の 2 つの等式を同時に満たす実数 x, y の値を求めよ.

$$3^{1-x} = 27^{\frac{y}{3}}, \quad \log_x 2 = \log_y 4$$

(25 茨城大 教育・地域未来共創 1(2))

【答】 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

【解答】

$$\begin{cases} 3^{1-x} = 27^{\frac{y}{3}} \\ \log_x 2 = \log_y 4 \end{cases} \quad \cdots \cdots (*)$$

対数の底条件より, x, y は

$$x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす. このとき

$$\begin{aligned} (*) &\iff \begin{cases} 3^{1-x} = 3^{3 \cdot \frac{y}{3}} \\ \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{\log_2 4}{\log_2 y} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1-x = y \\ \log_2 y = 2 \log_2 x \end{cases} \quad (\because \textcircled{1} \text{より } \log_2 x \neq 0, \log_2 y \neq 0) \\ &\iff \begin{cases} y = 1-x \\ y = x^2 \end{cases} \end{aligned}$$

x について解くと

$$\begin{aligned} x^2 &= 1-x \\ x^2 + x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる. $\textcircled{1}$ より

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

であり

$$y = 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.