三角形 ABC があり，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=5:6:7$ とする．

(i) $\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値を答えなさい．

(ii) 三角形 ABC の内接円の半径が 1 であるとき，三角形 ABC の面積を答えなさい．

(25 大阪医薬大 薬 A 2(3))

【答】

(i) $\dfrac{1}{5}$

(ii) $\dfrac{9\sqrt{6}}{4}$

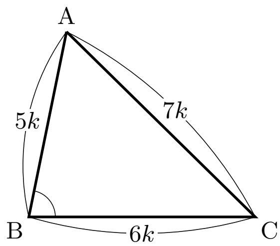
【解答】

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=5:6:7 \qquad \cdots\cdots ①$$

(i) ① より三角形 ABC の 3 辺の長さは，正の実数 k を用いて

$$\mathrm{AB}=5k,\ \mathrm{BC}=6k,\ \mathrm{CA}=7k$$

とおくことができる．余弦定理より



$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{ABC}&=\frac{(5k)^2+(6k)^2-(7k)^2}{2\cdot5k\cdot6k}\\&=\frac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6}\\&=\frac{12}{2\cdot5\cdot6}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(ii) 三角形 ABC の内接円の半径を r，面積を S とおくと

$$S=r\cdot\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．$r=1$ であるから

$$(\text{右辺})=1\cdot\frac{5k+6k+7k}{2}=9k$$

である．また

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}\\&=\frac{1}{2}\cdot5k\cdot6k\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\quad(\because\ (1))\\&=3k^2\sqrt{24}\\&=6\sqrt{6}k^2\end{aligned}$$

であるから，② より

$$6\sqrt{6}k^2=9k \qquad \therefore\quad k=\frac{3}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}\quad(\because\ k\neq0)$$

$$\therefore\quad S=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{6}}{4}}$$

……(答)

である．