$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2\sin^2\theta - \cos^2\theta - \sin\theta + a = 0$ を満たす θ がちょうど 2 つであるような定数 a の値の範囲を求めよ．

(25 茨城大 工 2(3))

【答】 $-1 < a < 1,\ a = \dfrac{13}{12}$

【解答】

$$2\sin^2\theta - \cos^2\theta - \sin\theta + a = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

$$\begin{aligned}(*) \iff a &= -2\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta \\ &= -2\sin^2\theta + (1 - \sin^2\theta) + \sin\theta \\ &= -3\sin^2\theta + \sin\theta + 1\end{aligned}$$

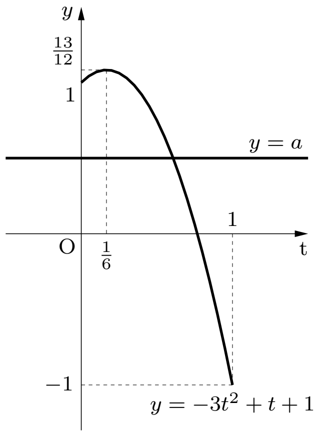
$t = \sin\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}a &= -3t^2 + t + 1 \qquad \cdots\cdots (**) \\ &= -3\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{13}{12}\end{aligned}$$

である．$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，t の動く範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ であり，$(**)$ を満たす t に対応する θ の個数は

$0 \leqq t < 1$ に対し，　θ は 2 個
$t = 1$ に対し，　θ は 1 個

である．$(**)$ を満たす t は曲線 $y = -3t^2 + t + 1$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と直線 $y = a$ の共有点の t 座標であるから，$(*)$ を満たす θ がちょうど 2 つである a の値の範囲は



$$\boldsymbol{-1 < a < 1,\ a = \frac{13}{12}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．