$p,\ q$ を正の実数とする．原点を O とする座標平面上に点 A(1, 0)，点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{2}{q}\right)$ がある．$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおき，P，Q は $\alpha<\beta$ を満たしながら動くものとする．三角形 OPQ の面積を S とし，また，$T=\tan(\beta-\alpha)$ とおく．以下の問 (1)〜(5) に答えよ．解答欄には，(1)，(2) については答えのみを，(3)〜(5) については答えだけでなく途中経過も書くこと．

(1) $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ をそれぞれ p を用いて表せ．また，$\cos\beta$，$\sin\beta$ をそれぞれ q を用いて表せ．

(2) T を $p,\ q$ を用いて表せ．

(3) S を $p,\ q$ を用いて表せ．

(4) $t=pq$ とおく．$\dfrac{S}{T}$ を t を用いて表せ．

(5) $\dfrac{S}{T}$ の最小値を求めよ．

(25 立教大 文系 2 月 9 日 2)

【答】

(1) $\cos\alpha=\dfrac{p^2}{\sqrt{p^4+1}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{p^4+1}}$，$\cos\beta=\dfrac{q^2}{\sqrt{q^4+4}}$，$\sin\beta=\dfrac{2}{\sqrt{q^4+4}}$

(2) $T=\dfrac{2p^2-q^2}{p^2q^2+2}$

(3) $S=\dfrac{2p^2-q^2}{2pq}$

(4) $\dfrac{S}{T}=\dfrac{t^2+2}{2t}$

(5) $\left(\dfrac{S}{T}\text{の最小値}\right)=\sqrt{2}$

【解答】

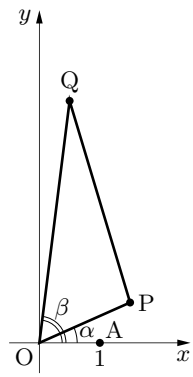
(1) $p>0$，$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ であるから

$$\mathrm{OP}=\sqrt{p^2+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=\frac{1}{p}\sqrt{p^4+1}$$

である．A(1, 0)，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$ であるから

$$\cos\alpha=\frac{p}{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{p^2}{\sqrt{p^4+1}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

$$\sin\alpha=\frac{\frac{1}{p}}{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{p^4+1}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$



$q>0$，$\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{2}{q}\right)$ であるから

$$\mathrm{OQ}=\sqrt{q^2+\left(\frac{2}{q}\right)^2}=\frac{1}{q}\sqrt{q^4+4}$$

である．$\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ であるから

$$\cos\beta=\frac{q}{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{\frac{q^2}{\sqrt{q^4+4}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

$$\sin\beta=\frac{\frac{2}{q}}{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{q^4+4}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 加法定理より

$$T = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

である．(1) より

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{p^2}, \quad \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{2}{q^2}$$

であるから

$$T = \frac{\dfrac{2}{q^2} - \dfrac{1}{p^2}}{1 + \dfrac{2}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}} = \boldsymbol{\frac{2p^2 - q^2}{p^2q^2 + 2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) S は $\triangle$OPQ の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\sin(\beta-\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\sqrt{p^4+1}\cdot\frac{1}{q}\sqrt{q^4+4}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{q^4+4}}\cdot\frac{p^2}{\sqrt{p^4+1}} - \frac{q^2}{\sqrt{q^4+4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p^4+1}}\right) \\ &\qquad (\because\ \text{加法定理}) \\ &= \boldsymbol{\frac{2p^2 - q^2}{2pq}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(4) $t = pq$ とおくと

$$\frac{S}{T} = \frac{\dfrac{2p^2 - q^2}{2pq}}{\dfrac{2p^2 - q^2}{p^2q^2 + 2}} = \frac{p^2q^2 + 2}{2pq} = \boldsymbol{\frac{t^2 + 2}{2t}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) $t > 0$ より相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$\frac{S}{T} = \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \geqq 2\sqrt{\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{t}} = \sqrt{2}$$

等号は $\dfrac{t}{2} = \dfrac{1}{t}$ のとき，すなわち $t = \sqrt{2}\ (> 0)$ のとき成立する．

よって，$\dfrac{S}{T}$ の最小値は　$\boldsymbol{\sqrt{2}}$　である． $\cdots\cdots$(答)