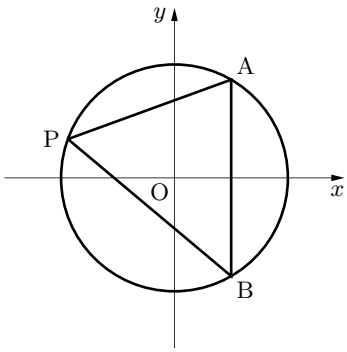
半径 1 の円周 C 上の 2 点 A，B は $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ をみたすとする．点 P が円周 C 上を動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最大値を求めよ．

(25 九州大 文系 2)

【答】 6

【解答】

座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C と 2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる．このとき $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ である．点 P は円周 C 上を動くから P の座標は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくことができる．



$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2\\
&=\left\{\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}\\
&\qquad+\left\{\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}\\
&=\left\{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1\right\}+\left\{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+1\right\}\\
&=4-2\cos\theta
\end{aligned}
$$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ は $\theta=\pi$ のとき

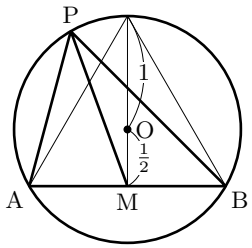
$$\text{最大値 } 4-2(-1)=\mathbf{6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

- 線分 AB の中点を M とおき，中線定理

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=2(\mathrm{PM}^2+\mathrm{AM}^2)$$

を利用する．



$$
\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2&=2\mathrm{PM}^2+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&=2\mathrm{PM}^2+\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

PM が最大となるのは，PM が円の中心 O を通るときである．このとき

$$\mathrm{PM}=\mathrm{PO}+\mathrm{OM}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

であり，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最大値は

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$$

となる．

- 円 C の中心を O とおくと

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$$

である．$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ より

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3\\
&1^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+1^1=3\\
\therefore\quad &\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である．

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\ &= 4-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= 4-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{1^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+1^2} = \sqrt{2+2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を φ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2 &= 4-2\times1\times1\times\cos\varphi\\ &= 4-2\cos\varphi\end{aligned}$$

となる．$-1 \leqq \cos\varphi \leqq 1$ より，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ は $\varphi=-\pi$ のとき

最大値 $4-2(-1)=6$

をとる．