$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において．関数 $y = 3\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta$ の最大値は $\boxed{\text{ホ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である．

(25 会津大 1(5))

【答】

ホ	ヘ
3	$2-\sqrt{2}$

【解答】

式を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 3\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + 1 \\ &= (1+\cos 2\theta) - \sin 2\theta + 1 \\ &= \sqrt{2}\left(\cos 2\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 2\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \\ &= \sqrt{2}\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \end{aligned}$$

となる．θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くから，$\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ であり，y は

$$2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ のとき，最大値}\quad \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 2 = \mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとり，

$$2\theta + \frac{\pi}{4} = \pi \text{ のとき，最小値}\quad \sqrt{2}\cdot(-1) + 2 = \mathbf{2-\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．