t を $0 \leqq t \leqq \pi$ を満たす実数とし，xy 平面上の放物線

$$C : y = x^2 - (2\sin t)x + \sin t \cos t$$

の頂点を P とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 P の座標を t を用いて表せ．

(2) 放物線 C と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような t の値の範囲を求めよ．

(3) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき，点 P の y 座標の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの t の値を求めよ．

(25 青山学院大 理工 B 3)

【答】

(1) $\mathrm{P}(\sin t,\ -\sin^2 t + \sin t \cos t)$

(2) $\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \pi$

(3) $t = \dfrac{\pi}{8}$ のとき，最大値 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$; $t = \dfrac{5\pi}{8}$ のとき，最大値 $\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}$

【解答】

$$C : y = x^2 - (2\sin t)x + \sin t \cos t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

(1) C は

$$y = (x - \sin t)^2 - \sin^2 t + \sin t \cos t$$

と変形されるから，頂点 P の座標は

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\sin t,\ -\sin^2 t + \sin t \cos t}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 放物線 C と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるための条件は頂点 P が第 4 象限にあり，C が y 軸と正の部分で交わることである．よって，t の値の範囲は

$$\begin{cases} \sin t > 0 \\ -\sin^2 t + \sin t \cos t < 0 \\ \sin t \cos t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin t > 0 \\ \cos t > 0 \\ \cos t - \sin t < 0 \end{cases} \iff 0 < \cos t < \sin t$$

$0 \leqq t \leqq \pi$ より

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \leqq t \leqq \pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $f(t) = -\sin^2 t + \sin t \cos t$ とおき，t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値と最小値を求める．

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{1-\cos 2t}{2} + \frac{\sin 2t}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる．$0 \leqq t \leqq \pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4} \leqq 2t + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{9}{4}\pi$ であり，$f(t)$ は

$2t + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{8}}$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ……(答)

$2t + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{2}$，すなわち $\boldsymbol{t = \dfrac{5\pi}{8}}$ のとき　**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}}$ ……(答)

をとる．