$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$f(\theta) = \sin 2\theta + \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ として，$f(\theta)$ を t を用いて表せ．
(2) t のとりうる値の範囲を求めよ．
(3) $f(\theta)$ の最大値および最小値と，そのときの θ の値をそれぞれ求めよ．

(25 鳥取大 地域・農 (生)4・医 (生・保)・工・農 (獣) 1)

【答】
(1) $f(\theta) = t^2 + \sqrt{2}t - 1$
(2) $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$
(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 3 ; $\theta = \dfrac{11}{12}\pi$，$\dfrac{19}{12}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{3}{2}$

【解答】

$$f(\theta) = \sin 2\theta + \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

(1) 第 1 項に 2 倍角の公式を用いると

$$f(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta + \sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta)$$

である．$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと

$$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (t^2 - 1) + \sqrt{2}t \\ &= \boldsymbol{t^2 + \sqrt{2}t - 1} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 合成の公式により

$$\begin{aligned} t &= \sin\theta + \cos\theta \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) \\ &= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となる．θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くから，$-1 \leqq \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ であり，t のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3)
$$f(\theta) = \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

であるから

$t = \sqrt{2}$ 　すなわち　$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$，　$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ **のとき，最大値**$(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 1 = \boldsymbol{3}$ ……(答)

$t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 　すなわち　$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$，　$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{11}{12}\pi}$，$\boldsymbol{\dfrac{19}{12}\pi}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$ ……(答)

をとる．