座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある．また，直線 $x=2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．

(1) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つような P の y 座標の範囲を求めよ．

(2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つとき，その 2 つの共有点を通る直線を ℓ とする．ℓ に関して P と対称な位置にある点を Q とする．ただし，P が ℓ 上にあるときは Q = P とする．P の y 座標が (1) で求めた範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求め，図示せよ．

(25 一橋大 2)

【答】

(1) $-2\sqrt{3}<y<0,\ 0<y<2\sqrt{3}$

(2) $(x-2)^2+y^2=4$ かつ $\begin{cases} y \fallingdotseq 0 \\ (y+\sqrt{3}x)(y-\sqrt{3}x)<0 \end{cases}$ 　図略

【解答】

$$C_1 : x^2+y^2=9 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$C_2 : (x-2)^2+(y-p)^2=1 \quad (p \text{ は実数の定数}) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ①，②の辺々を引くと

$$4x+2py-4-p^2=8$$

$$\therefore\quad 4x+2py-p^2-12=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

を得る．

「① かつ ②」$\iff$「① かつ ③」

であるから，C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つための条件は C_1 と C_3 が共有点を 2 つ持つことであり

(C_1の中心 (0, 0) と直線③の距離) < (C_1の半径)

である．

$$\frac{|-p^2-12|}{\sqrt{4^2+(2p)^2}}<3 \iff |p^2+12|<6\sqrt{p^2+4} \iff (p^2+12)^2<36(p^2+4)$$

この不等式を解くと

$$p^4-12p^2<0$$

$$p^2(p^2-12)<0 \qquad \therefore\quad 0<p^2<12 \qquad \cdots\cdots ④$$

よって，中心 P の y 座標の範囲は

$$\boldsymbol{-2\sqrt{3}<y<0,\ 0<y<2\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つための条件は

(半径の差) < (中心間の距離) < (半径の和)

$$\iff 3-1<\sqrt{2^2+p^2}<3+1$$

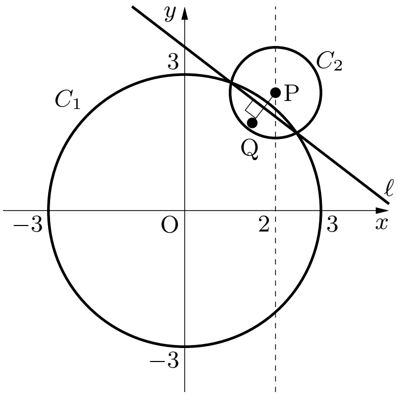
$$4<4+p^2<16$$

$$\therefore\quad 0<p^2<16$$

よって，中心 P の y 座標の範囲は

$$-2\sqrt{3}<y<0,\ 0<y<2\sqrt{3}$$

である．



(2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つとき，その 2 つの共有点を通る直線 ℓ は ③ である．

Q は ℓ に関する P の対称点であるから

線分 PQ の中点は ℓ 上にあり，
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\ell\text{の方向ベクトル})=0$

を満たす．これは P = Q のときも成り立つ．Q の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{cases}4\dfrac{X+2}{2}+2p\dfrac{Y+p}{2}-p^2-12=0\\(X-2,\ Y-p)\cdot(p,\ -2)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2X+pY-8=0 & \cdots\cdots ⑤\\pX-2Y=0 & \cdots\cdots ⑥\end{cases}$$

であり，点 Q の軌跡は「④ かつ ⑤ かつ ⑥」を満たす実数 p が存在するような点 $(X,\ Y)$ の集合である．

⑥ において，$X=0$ とすると，$Y=0$ であり，これは ⑤ に反する．したがって，$X\neq 0$ であり

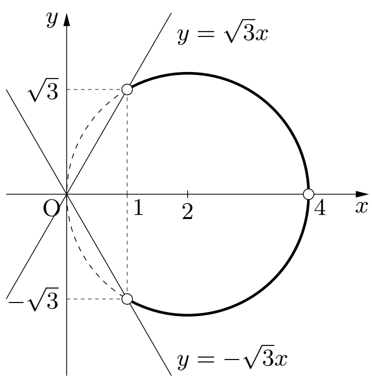
$$「④ かつ ⑤ かつ ⑥」\iff\begin{cases}p=\dfrac{2Y}{X}\\2X-\dfrac{2Y}{X}Y-8=0\\0<\left(\dfrac{2Y}{X}\right)^2<12\end{cases}$$

$X\neq 0$ に注意して，第 2 式を整理すると

$$X^2-Y^2-4X=0 \qquad \therefore\quad (X-2)^2+Y^2=4$$

であり，第 3 式は

$$0<Y^2<3X^2$$
$$\iff\begin{cases}Y\neq 0\\(Y+\sqrt{3}X)(Y-\sqrt{3}X)<0\end{cases}$$



であり，点 Q の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2+y^2=4}$$
かつ
$$\boldsymbol{\begin{cases}y\neq 0\\(y+\sqrt{3}x)(y-\sqrt{3}x)<0\end{cases}}$$
……(答)

であり，図示すると右図の太線部分となる．白丸は除く．

- ⑤, ⑥ より

$$(X,\ Y)=\left(\frac{16}{p^2+4},\ \frac{8p}{p^2+4}\right)$$

である．$p=2\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$X=\frac{16}{4\tan^2\theta+4}=4\cos^2\theta=4\frac{1+\cos 2\theta}{2}=2(1+\cos 2\theta),$$
$$Y=\frac{16\tan\theta}{4\tan^2\theta+4}=4\tan\theta\cos^2\theta=4\sin\theta\cos\theta=2\sin 2\theta$$

また，④ は

$$0 < 4\tan^2\theta < 12 \qquad \therefore \quad 0 < \tan^2\theta < 3$$

$$-\sqrt{3} < \tan\theta < 0 \quad \text{または} \quad 0 < \tan\theta < \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad -\frac{\pi}{3} < \theta < 0 \quad \text{または} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

であり，座標平面における Q の軌跡は

$$\begin{cases} (x,\ y) = (2,\ 0) + 2(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta) \\ -\dfrac{2\pi}{3} < 2\theta < 0 \quad \text{または} \quad 0 < 2\theta < \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

であり，これを図示すると【解答】の図を得る．

◦ Q は半直線 OP 上の点であり，さらに

$$\mathrm{OQ} = \sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{p^2+4}\right)^2 + \left(\frac{8p}{p^2+4}\right)^2} = \frac{8\sqrt{4+p^2}}{p^2+4} = \frac{8}{\mathrm{OP}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{OP} \times \mathrm{OQ} = 8$$

を満たす．性質

$$\mathrm{OP} \times \mathrm{OQ} = k \quad (k \text{ は正の定数})$$

を満たす半直線上の変換 $\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}$ は反転と呼ばれており，原点を通らない直線の像は円になることが知られている．

- 「④ かつ ⑤ かつ ⑥」について ⑤ を

$$2(X-4) + pY = 0$$

と変形すると，⑤ は p の値にかかわらず点 $(4,\ 0)$ を通る直線であることがわかる．同じく，⑥ は p の値にかかわらず点 $(0,\ 0)$ を通る直線である．さらに，⑤, ⑥ は直交するから，⑤, ⑥ の交点 Q は 2 点 $(4,\ 0)$，$(0,\ 0)$ を直径の両端とする円上を動く．

また，「④ かつ ⑤ かつ ⑥」のとき $X \fallingdotseq 0$(【解答】参照) であり

$$\text{「④ かつ ⑥」} \iff \begin{cases} p = \dfrac{2Y}{X} \\ 0 < \left(\dfrac{2Y}{X}\right)^2 < 12 \end{cases}$$

と変形することにより

$$\begin{cases} y \fallingdotseq 0 \\ (y+\sqrt{3}x)(y-\sqrt{3}x) < 0 \end{cases}$$

を得る (【解答】参照)．以上より，解答の図を得る．