$a,\ b,\ c,\ d$ を実数の定数とする．座標平面上に 2 つの放物線

$$C_1 : y = 2x^2 + ax + 4b$$
$$C_2 : y = bx^2 + cx + d$$

があり，C_1 と C_2 は原点に関して対称である．

(i) C_1 の頂点の x 座標を a を用いて表しなさい．
(ii) b と d の値を答えなさい．
(iii) a がすべての実数値をとって変化するとき，C_2 の頂点の軌跡を表す方程式を答えなさい．

(25 大阪医薬大 薬 B 2(3))

【答】

(i) $-\dfrac{a}{4}$
(ii) $b = -2,\ d = 8$
(iii) $y = 2x^2 + 8$

【解答】

$$C_1 : y = 2x^2 + ax + 4b$$
$$C_2 : y = bx^2 + cx + d$$

(i) C_1 の方程式を平方完成すると

$$C_1 : y = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + 4b$$

となるから，C_1 の頂点の x 座標は

$$\boldsymbol{-\frac{a}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) C_1 と C_2 は原点に関して対称であるから，C_1 上の点 $(x,\ y)$ を原点に関して対称移動した点 $(-x,\ -y)$ は C_2 上の点であり

$$-y = 2(-x)^2 + a(-x) + 4b$$
$$\therefore\quad y = -2x^2 + ax - 4b$$

を満たし，これは C_2 と一致する．係数を比較すると

$$\begin{cases} b = -2 \\ c = a \\ d = -4b \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} b = -2 \\ d = 8 \\ c = a \end{cases}$$

である．よって

$$\boldsymbol{b = -2,\ d = 8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(iii) (ii) より，C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + ax + 8 \\ &= -2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + 8 \end{aligned}$$

であり．C_2 の頂点の座標 $(x,\ y)$ は

$$(*)\begin{cases} x = \dfrac{a}{4} \\ y = \dfrac{a^2}{8} + 8 \end{cases}$$

である．a がすべての実数値をとって変化するときの C_2 の頂点の軌跡は，$(*)$ を満たす実数 a が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$(*) \iff \begin{cases} a = 4x \\ y = \dfrac{(4x)^2}{8} + 8 \end{cases}$$

a は実数全体を動くから，x も実数全体を動き，$(x,\ y)$ は

$$y = 2x^2 + 8$$

を満たす．

よって，C_2 の頂点の軌跡を表す方程式は

$$\boldsymbol{y = 2x^2 + 8} \qquad \cdots\cdots\text{（答）}$$

である．