xy 平面上の 2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ に対して，点 P$(x,\ y)$ が条件

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = m : 1 \quad (m > 0)$$

を満たしながら動くとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P の軌跡を求めよ．

(2) $m = 2,\ x > 0,\ y > 0$ のとき，$x + 2y$ の最大値を求めよ．

(25 東京海洋大 生命・資源 4)

【答】

(1) $\begin{cases} m = 1 \text{ のとき，} & \text{直線 } x = 0 \\ m \fallingdotseq 1 \text{ のとき，} & \text{点} \left(\dfrac{m^2+1}{m^2-1},\ 0 \right) \text{を中心とする半径 } \dfrac{2m}{|m^2-1|} \text{ の円} \end{cases}$

(2) $\dfrac{5+4\sqrt{5}}{3}$

【解答】

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = m : 1 \quad (m > 0) \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ に対して，点 P$(x,\ y)$ が条件 $(*)$ を満たすから

$$(*) \iff m\mathrm{BP} = \mathrm{AP} \iff m^2\mathrm{BP}^2 = \mathrm{AP}^2 \quad (\because\ m > 0)$$

$x,\ y$ で表すと

$$m^2\{(x-1)^2 + y^2\} = (x+1)^2 + y^2$$
$$(m^2-1)x^2 + (m^2-1)y^2 - 2(m^2+1)x + m^2 - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．$m > 0$ より $m^2 - 1 = 0$ となる m の値は $m = 1$ であることに注意する．

(i) $m = 1$ のとき，① は

$$-4x = 0 \qquad \therefore\quad x = 0$$

である．

(ii) $m \fallingdotseq 1$ のとき，① は

$$x^2 + y^2 - 2\frac{m^2+1}{m^2-1}x + 1 = 0$$
$$\left(x - \frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2 - 1$$
$$\therefore\quad \left(x - \frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4m^2}{(m^2-1)^2}$$

である．

(i)，(ii) より，点 P の軌跡は

$$\begin{cases} \boldsymbol{m = 1} \textbf{ のとき，} & \textbf{直線 } \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{m \fallingdotseq 1} \textbf{ のとき，} & \textbf{点}\boldsymbol{\left(\dfrac{m^2+1}{m^2-1},\ 0\right)}\textbf{を中心とする半径 } \boldsymbol{\dfrac{2m}{|m^2-1|}} \textbf{ の円} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $m \fallingdotseq 1$ のときの円はアポロニウスの円と呼ばれている．
- 幾何的な解法も示しておく．
  条件 $(*)$ を満たす直線 AB 上の点 P は

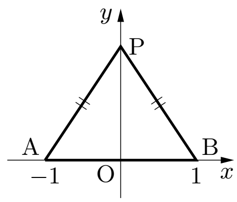
(i) $m=1$ のとき，線分 AB の中点のみである．この中点は原点 O である．

(ii) $m \fallingdotseq 1$ のとき，線分 AB を $m:1$ に内分する点と $m:1$ に外分する点の 2 点がある．それぞれ C，D とおく．

(i)，(ii) に分けて点 P の軌跡を求める．

(i) $m=1$ のとき

(ア) P($\fallingdotseq$ O) が ($*$) を満たすならば，△APO，△BPO の 3 辺の長さについて



$$\mathrm{AP}=\mathrm{BP},\ \mathrm{AO}=\mathrm{BO},\ \mathrm{OP}\ は共通辺$$

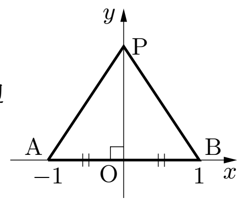
であり

$$\triangle\mathrm{APO}\equiv\triangle\mathrm{BPO}$$

である．OP $\perp$ AB かつ AO $=$ BO であるから

P は線分 AB の垂直二等分線上の点である．

(イ) 逆に，P($\fallingdotseq$ O) が線分 AB の垂直二等分線上の点ならば



$$\mathrm{AO}=\mathrm{BO},\ \angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}(=90^\circ),\ \mathrm{OP}\ は共通辺$$

であり

$$\triangle\mathrm{APO}\equiv\triangle\mathrm{BPO}$$

であるから

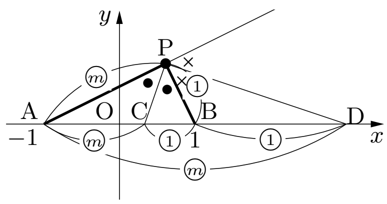
$$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}\qquad\therefore\quad \mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:1$$

が成り立つ．

(ア)(イ) より，点 P の軌跡は O も含めて線分 AB の垂直二等分線である．

(ii) $m \fallingdotseq 1$ のとき

(ア) P($\fallingdotseq$ C, D) が ($*$) を満たすならば，

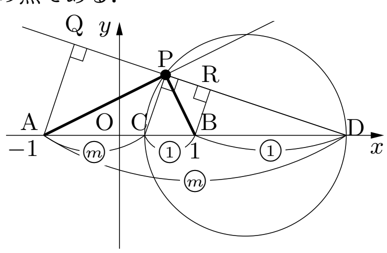


AP : BP $=$ AC : BC($= m:1$) であり，
PC は∠APB の二等分線である

AP : BP $=$ AD : BD($= m:1$) であり，
PD は∠APB の外角の二等分線である

このとき ∠CPD $=90^\circ$ であり，
点 P は C，D を直径の両端とする円上の点である．

(イ) 逆に，P($\fallingdotseq$ C, D) が C，D を直径の両端とする円上の点ならば，直線 PD に A，B から垂線 AQ，BR を引く．



QP : PR $=$ AC : CB $= m:1$
AQ : BR $=$ AD : DB $= m:1$
∠AQP=∠BRP(=90°)

であり

$$\triangle\mathrm{APQ}\backsim\triangle\mathrm{BPR}\ (相似比は\ m:1)$$

であるから

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:1$$

が成り立つ．

(ア)(イ) より，点 P の軌跡は C，D も含めて C，D を直径の両端とする円である．

(2) $m=2$ のとき，点 P の軌跡は

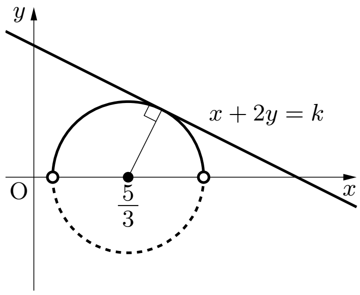
$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．x, y が ②, $x>0$, $y>0$ を満たしながら動くときの $x+2y$ のとり得る値の範囲は

$$x+2y=k \qquad \cdots\cdots ③$$

とおくと，②, ③ を満たす正の数 x, y が存在するような実数 k の集合であり，それは円 ② と直線 ③ が第 1 象限で共有点をもつような実数 k の集合である．

k が最大となるのは，円 ② と直線 ③ が第 1 象限で接するときであり，このときの k の値は



$$\frac{\left|\frac{5}{3}+2\cdot 0-k\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4}{3}$$

$$\left|\frac{5}{3}-k\right|=\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

$$k=\frac{5}{3}\pm\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

$x>0$, $y>0$ より $k>0$ であるから

$$k=\boldsymbol{\frac{5+4\sqrt{5}}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．